بحوث العمليات في المحاسبة

تأليف

أ.د. عبد المنعم فليح عبد اللّه
أستاذ محاسبة التكاليف
كلية التجارة - جامعة القاهرة

أ.د. خالد عبد المنعم زكي لبيب
أستاذ المراجعة
كلية التجارة - جامعة القاهرة

د. طه الطاهر إبراهيم
أستاذ المحاسبة المساعد
كلية التجارة - جامعة القاهرة

د. محمد عبد العظيم حسن
مدرس المحاسبة
كلية التجارة - جامعة القاهرة

الطبعة الثانية : الإصدار الأول

الناشر: جهاز الكتب – كلية التجارة – جامعة القاهرة

١٤٣٩ هـ - ٢٠١٨م.

بسم الله الرحمن الرحيم

وَنَضَعُ الْمَوَازِينَ الْقِسْطَ لِيَوْمِ الْقِيَامَةِ فَلَا تُظْلَمُ نَفْسٌ شَيْئًا وَإِنْ كَانَ مِثْقَالَ حَبَّةٍ مِنْ خَرْدَلٍ أَتَيْنَا بِهَا وَكَفَى بِنَا حَاسِبِينَ

سورة الأنبياء: آية رقم ٤٧

مقدمة:

الحمد لله رب العالمين، نحمده ونستعينه ونستهديه ونستغفره، ونعوذ بالله من شرور أنفسنا ومن سيئات أعمالنا؛ إنه من يهده الله فلا مضل له، ومن يضلل فلن تجد له ولياً مرشداً. والصلاة والسلام الأتمان الأكملان على سيد ولد آدم، وخير البشر، وخير خلق الله تعالى، ومصطفاه، سيدنا ونبينا وقرة أعيننا سيدنا محمد بن عبد الله ، بلغ الرسالة، وأدى الأمانة، وجاهد في سبيل ربه حتى أتاه اليقين، فاللهم اجزه عنا وعن والدينا وعن الإسلام والمسلمين خير ما جزيت به نبياً عن أمته، ورسولاً عن قومه، واجمع بيننا وبينه، كما آمنا به ولم نره، ولا تفرق بيننا وبينه حتى تدخلنا مدخله، وأوردنا حوضه الطاهر المورود، واسقنا من يده الشريفة شربةً هنيئةً لا نظمأ بعدها أبداً، اللهم أحيينا على سنته وأمتنا على ملته، واجعل صلاتنا ونسكنا وسائر أعمالنا وخواطرنا خالصةً مخلصةً لوجهك الكريم، وتقبلها منا في الصالحين.

أما بعد؛ فلقد أصبح استخدام النماذج – خاصة الرياضية منها – أمراً ضرورياً، في أغراض اتخاذ القرارات، نتيجة لتعقد مشكلات اتخاذ القرارات، وتعدد المتغيرات التي تتضمنها، وعلاقات الارتباط المتشابكة بين هذه المتغيرات، بالإضافة إلى ظروف عدم التأكد التي تسود معظم حالات اتخاذ القرارات.

هذا، وتهتم بحوث العمليات بتطبيق المنهج العلمي في حل المشكلات واتخاذ القرارات. وهي تعتمد في ذلك على الله تعالى، ثم على مجموعة من النماذج الرياضية والإحصائية. ولذلك فلقد أصبح من الضروري أن يكون المحاسب ملماً بنماذج بحوث العمليات، حتى يمكن توفير المعلومات الملائمة، كمدخلات لهذه النماذج. وذلك بالإضافة إلى أنه يمكن استخدام العديد من نماذج بحوث العمليات في حل المشكلات المحاسبية، كالتخطيط المالي، وإعداد الموازنات التخطيطية، وتسعير التحويلات الداخلية، وكذلك في أغراض الرقابة المحاسبية.

ويهدف هذا الكتاب إلى دراسة مجموعة منتقاة من نماذج وأساليب بحوث العمليات، بما يخدم المحاسبين والاستخدامات المحاسبية لهذه النماذج، وتقديمها للمحاسبين بالصورة التي تمكنهم من مساعدة الإدارة في ترشيد الكثير من قراراتها.

وقد تم تصميم وبناء هذا المرجع بهدف دراسة مجموعة من الموضوعات الهامة، والتي تتصل اتصالاً وثيقاً بمساعدة المحاسبين على فهم نموذج وأساليب بحوث العمليات، وكيفية تطبيقها، والاستفادة منها في أداء المهام المنوطة بهم؛ وليكون إحدى لبنات تطوير التعليم المحاسبي بالوطن العربي والإسلامي، وبجمهورية مصر العربية بوجه خاص.

وقد حاولنا قدر المستطاع أن نجمع بين منظومتي الحداثة والأصالة، وذلك مع التبسيط غير المخل، بغية تيسير عرض المادة العلمية على أبنائنا من طلاب مرحلة البكالوريوس، وكذلك أبنائنا من طلاب الدراسات العليا، ومزاولي مهنة المحاسبة والمراجعة، المهتمين بالإطلاع على الكتابات الأكاديمية المتخصصة.

رَّبَّنَا عَلَيْكَ تَوَكَّلْنَا وَإِلَيْكَ أَنَبْنَا وَإِلَيْكَ الْمَصِيرُ (سورة الممتحنة آية رقم ٤)

والله المستعان، وعليه التكلان، وهو ولى التوفيق.

المؤلفون

القاهرة في غرة ربيع أول من عام ١٤٣٩هـ.
١ من ديسمبر من سنة ٢٠١٧م.

الفصل الأول
الإطار العام لبحوث العمليات:
المفاهيم والمبادئ

نشأة وطبيعة بحوث العمليات:

ترجع نشأة بحوث العمليات (Operations Research /OR) في واقع الأمر، إلى تاريخ نشوب الحرب العالمية الثانية، حيث تطور هذا الفرع من فروع المعرفة منذ ذلك التاريخ تطوراً سريعاً، حيث قامت المملكة المتحدة أثناء الحرب العالمية الثانية، بالإستعانة بفريق من العلماء لدراسة المشكلات الاستراتيجية لوسائل الدفاع، وذلك سعياً نحو تحقيق الاستخدام الأمثل للموارد العسكرية المحدودة. حيث اعتبر تكوين هذا الفريق العلمي بمثابة نقطة البداية لظهور ما يعرف حاليا بمدخل بحوث العمليات، ويرجع سبب إطلاق مصطلح بحوث العمليات، إلي قيام فريق العلماء آنذاك بإجراء أبحاثه علي العمليات الحربية.

وقد أدي نجاح فرق بحوث العمليات العسكرية، إلي قيام رجال الصناعة بعد انتهاء الحرب العالمية الثانية، بمحاولة الاستفادة مما توصلت إليه هذه الفرق. ويمكن القول بأنه من أهم ما ساهم في إدخال بحوث العمليات في الصناعة:

١. قيام كل من: George Dantzig في عام ١٩٤٧م.، و Charnes and Cooper في عام ١٩٥١م.، بتقديم نموذج البرمجة الخطية كأسلوب رياضي، يمكن الاعتماد عليه للوصول إلي التوزيع الأمثل للموارد النادرة والمحدودة، وكذلك تقديم طريقة السمبلكس لحل نموذج البرمجة الخطية، والذي يعد من أهم نماذج بحوث العمليات وأكثرها ملاءمة للتطبيق في منشآت الأعمال.

٢. ظهور واستخدام الحاسبات الإلكترونية، بما لها من قدرات فائقة علي القيام بالعمليات الحسابية المعقدة، والتي ترتكز عليها معظم أساليب ونماذج بحوث العمليات.

ولقد أثمر ذلك عن تطور مدخل بحوث العمليات بصورة كبيرة، كما تأسست الجمعيات المهنية لبحوث العمليات في كل من: المملكة المتحدة، والولايات المتحدة الأمريكية، وغيرهما من بلدان العالم، كما تم تقديم العديد من أساليب ونماذج بحوث العمليات، مثل نماذج البرمجة الخطية، وبرمجة الأهداف، والبرمجة الخطية متعددة الأهداف، ونماذج البرمجة غير الخطية، ونماذج المخزون، ونماذج المباريات ونماذج صفوف الانتظار، وغيرها من الأساليب والنماذج التي تم استخدامها على نطاق واسع، في الكثير من المشكلات الإدارية وأنشطة منشآت الأعمال.

هذا ويعتمد مدخل بحوث العمليات، علي تطبيق مبادئ التحليل الكمي، وبناء واستخدام النماذج، في وضع العوامل المركبة - التي ترتبط بمشكلة صنع القرار- في إطار منطقي يسمح بتحليلها تحليلاً علمياً، بهدف الوصول إلي استنتاجات علمية وحلول منطقية، تحقق أفضل النتائج بالنسبة لأهداف منشآت الأعمال.

كما يعتمد مدخل بحوث العمليات علي استخدام الحاسب الالكتروني، في معالجة الكم الهائل من العمليات الحسابية والرياضية اللازمة لحل النماذج والوصول إلى حلول المشكلات، الأمر الذي مثل دافعاً جوهرياً لسرعة وانتشار استخدامها، وتعدد وتنوع مجالات تطبيقها.

هذا، وعلى الرغم من أن بحوث العمليات لم تظهر بصورة رسمية، إلا خلال الحرب العالمية الثانية؛ فإنه عندما امتد استخدامها وتطبيقها لمواجهة احتياجات الصناعة، وحل مشكلات منشآت الأعمال، فقد تعددت مسمياتها، وكذلك معانيها ومفاهيمها.

فقد وصفها البعض بأنها حالة من حالات دراسة العمل، ووصفها البعض الآخر بأنها رياضيات تطبيقية؛ أما بالنسبة لرجال الأعمال فهي تعني من وجهة نظرهم تطبيق الإحصاء والفهم والإدراك العام لحل مشكلات الأعمال؛ كما نظر إليها بعض الكتاب علي أنها تمثل نشاطاً أو عملية تطبيقية، مكونة من بناء من المشكلات والأساليب والحلول، التي تم جمعهم تحت مسمى بحوث العمليات.

هذا، ويمكن إرجاع اختلاف معاني ومفاهيم بحوث العمليات إلي العديد من الأسباب وهى:

١- ارتباط نشأتها الأولي بالعمليات العسكرية.

٢- ارتباطها بجهود وأعمال Taylor مؤسس علم الإدارة في العصور الحديثة، ومكتشف دراسة العمل لتحسين كفاية منشآت الأعمال.

٣- محاولة ربطها بأساليب رياضية وإحصائية معينة، لتمييزها عن مجالات الخدمات الإدارية الأخرى.

٤- اصطلاح بحوث العمليات ذاته بشقيه: بحوث/العمليات، حيث قد يعمل مصطلح: بحوث، على خلق انطباع وهمي على أن الطريقة التي تستخدم مازالت محل البحث. إلا أنه على الرغم من ذلك، فقد أثبت مدخل بحوث العمليات خلال الحقبة الماضية من الزمن، أنه يمثل أحد المداخل الفعالة في حل المشكلات الحقيقية التي تواجه الإدارة. كما أن مصطلح: عمليات قد يفهم منه أنه يعالج فقط العمليات اليومية في منشآت الأعمال، مثل جدولة الإنتاج ورقابة المخزون وغير ذلك. إلا أن الكثير من دراسات بحوث العمليات لا تتعلق بعمليات يومية فقط، بل بمشكلات ذات نوع إستراتيجي أيضاً، مثل تخطيط برامج تشكيلة المنتجات وتصميم شبكات الأعمال، وتطوير برامج التوسع الآلي طويلة الأجل وغير ذلك.

هذا، ويلاحظ أنه نظراً لنشأة مدخل بحوث العمليات أثناء الحرب العالمية الثانية، فلقد أطلق عليه مصطلح بحوث العمليات العسكرية؛ غير أنه عندما امتد استخدامها في قطاع الأعمال، فقد سُمِّيت بتسميات مختلفة منها، ومن ذلك: الأسلوب العلمي للإدارة؛ الإدارة العلمية Management Science؛ تحليل القرارات Decision Analysis؛ التحليل الكمي Quantitative Analysis؛ تحليل النظم System Analysis؛ إلا أن مصطلح بحوث العمليات Operations Research يعد أكثر هذه المصطلحات شيوعاً.

وعلي الرغم من تعدد تعريفات بحوث العمليات، إلا أنه يمكن استخلاص أن مدخل بحوث العمليات يتمثل في تطبيق المنهج العلمي في حل مشكلات

الإدارة؛ كما يتميز مدخل بحوث العمليات بتداخل عدد من فروع المعرفة، مثل: الرياضة والاقتصاد والإحصاء والحاسبات الإلكترونية، وغيرها.

هذا وقد عرفت جمعية بحوث العمليات الإنجليزية مدخل بحوث العمليات، بأنه: تطبيق طرق العلم، في المشكلات المركبة التي تنشأ عند توجيه وإدارة النظم الكبيرة، من القوي البشرية، والآلية، والمواد، والأموال، في الصناعة ومنشآت الأعمال، والمنظمات الحكومية ومنشآت الدفاع. وذلك بحيث يتمثل المبدأ في إيجاد نموذج علمي للنظام، وذلك بهدف مساعدة الإدارة في تحديد سياستها وقراراتها بطريقة علمية.

كما عرفت جمعية بحوث العمليات الأمريكية مدخل بحوث العمليات، بأنه: التحديد العلمي لكيفية تصميم وتشغيل النظم البشرية والآلية بصورة أفضل، في ظل الظروف التي تستلزم تخصيص الموارد المحددة.

الأمر الذي يمكن معه استخلاص أن مدخل بحوث العمليات، يقوم علي مجموعة من المفاهيم الأساسية، والتي تعد بمثابة الدعائم أو الأركان الأساسية لمدخل بحوث العمليات، وهى:

١- تطبيق الطرق العلمية عند معالجة المشكلات.

٢- يتمثل المبدأ في إيجاد نموذج يتم بناؤه واستخدامه، تبعاً للطريقة العلمية التجريبية.

٣- يتمثل الدافع الأساسي في اتخاذ القرارات، أو مساعدة صانعي القرار في معالجة المشكلات وإيجاد حلول تلك المشكلات.

• الخصائص والسمات الرئيسة لبحوث العمليات:

تتمثل أهم الخصائص الأساسية لمدخل بحوث العمليات في:

(١) حل المشكلات يمثل: محور(بؤرة) اهتمام مدخل بحوث العمليات.

(٢) يطبق مدخل بحوث العمليات: المنهج العلمي في حل المشكلات واتخاذ القرارات.

(٣) يرتكز مدخل بحوث العمليات على: تطبيق مدخل النظم.

(٤) يعتمد مدخل بحوث العمليات على: تضافر جهود فريق العمل.

(٥) يعتمد مدخل بحوث العمليات على: النماذج الرياضية في حل المشكلات.

(٦) يعتمد مدخل بحوث العمليات على: استخدام الحاسبات الإلكترونية.

• حل المشكلات يمثل: محور(بؤرة) اهتمام مدخل بحوث العمليات:

نظراً لأن مدخل بحوث العمليات يتمثل في تطبيق المنهج العلمي في حل المشكلات، لذا فإن محور اهتمام هذا المدخل يتمثل في: مساعدة الإدارة في اتخاذ القرارات لحل المشكلات.

ولقد صار استخدام الإدارة للنماذج بوجه عام، والنماذج الرياضية بوجه خاص، أمراً ضرورياً بعد أن أصبح من الصعب التعامل مع مشكلات الواقع العملي مباشرة، وذلك بسبب تشابك وتعقد تلك المشكلات، واشتمالها على العديد من المتغيرات المتشابكة، وكذلك بسبب تعدد القيود المحيطة بحل مثل تلك المشكلات، ومن هنا فقد أصبح من الضروري القيام بتجريد مثل تلك المشكلات، وصياغتها في صورة نموذج يكون من السهل نسبياً التعامل معه، وذلك بدلاً من التعامل المباشر مع المشكلات الواقعية.

• يطبق مدخل بحوث العمليات: المنهج العلمي في حل المشكلات واتخاذ القرارات:

حيث يتضمن المنهج العلمي في حل المشكلات الخطوات الآتية:

أ- تحديد المشكلة وتعريفها.

ب- إجراء المشاهدة أو الملاحظة في ظل ظروف مختلفة لتحديد سلوك النظام الذي يتضمن المشكلة.

جـ - وضع الفروض وهي تصف كيفية تفاعل عناصر المشكلة والحلول البديلة لها.

د- إجراء التجارب اللازمة لاختبار صحة الفروض.

هـ - تحليل نتائج التجارب وقبول أو رفض الفروض.

وإذا كان المنهج العلمي السابق يطبق بنجاح في العلوم الطبيعية حيث تجري التجارب داخل المعمل في ظل ظروف يمكن التحكم فيها وبالتعامل مع متغيرات ومعالم قياساتها محددة بدقة، إلا أن المشكلة التي واجهتها بحوث العمليات هي كيفية تطبيق ذات المنهج علي معالجة مشكلات منشآت الأعمال حيث عدم التأكد يحيط بالبيانات والعلاقات بين المتغيرات، وحيث بيئة الأعمال في تغير مستمر ولا يمكن التحكم والسيطرة عليها، ولا شك أن نجاح بحوث العمليات في هذا الشأن يعد العامل المحدد لفعاليتها في حل مشكلات منشآت الأعمال وتفوقها علي باقي الأساليب التي تعتمد علي الخبرة الشخصية وسرعة البديهة والقواعد المنطقية البسيطة.

ويلاحظ أن بحوث العمليات تعني رؤية خاصة للعمليات، كما تتضمن نوعاً خاصاً من البحوث، حيث ينظر إلى العمليات كوحدة متكاملة، فلا تقتصر النظرة إلي المعدات المستخدمة أو الخصائص الطبيعية للمخرجات أو العوامل مجتمعة: لعملية اقتصادية متكاملة. هذه العملية الاقتصادية تخضع للتحليل المنطقي عن طريق عمليات ذهنية، ومناهج وطرق سليمة للتحليل، تربطها ببحوث العلماء في العلوم الطبيعية وهذا يقود إلي ما يطلق عليه الطريقة العلمية.

• <u>يرتكز مدخل بحوث العمليات على: تطبيق مدخل النظم:</u>

يتسم مدخل بحوث العمليات باعتماده على مدخل النظم؛ حيث يُعرف النظام بأنه: مجموعة من العناصر التي ترتبط ببعضها البعض وكذلك بالبيئة المحيطة، بمجموعة من العلاقات المتبادلة، حيث تتفاعل عناصر النظام معاً لكي تنجز أو تحقق هدفاً محدداً، أو مجموعة من الأهداف المتكاملة للنظام.
هذا، ومن الواجب ضرورة وجود تنسيق بين عناصر النظام ، وذلك لكي لا تطغي الأهداف الخاصة لكل منهم علي تحقيق الأهداف العامة للنظام ككيان واحد متكامل.

وتتسم النظم بمجموعة من الخصائص من أهمها خاصية هرمية النظم، حيث يمكن النظر إلي منشأة الأعمال، كنظام يتكون من مجموعة من الأنظمة الفرعية المترابطة مع بعضها ومع البيئة الخارجية بمجموعة من العلاقات المتبادلة. ومن أهم أمثلة النظم الفرعية للمنشآت الصناعية: نظم الإنتاج؛ و نظم التسويق؛ و نظم التخزين؛ و نظم الإدارة؛ والنظام المحاسبي؛ ونظم الرقابة الداخلية.

هذا، ويلاحظ أن تطبيق بحوث العمليات لمدخل النظم، يتطلب: ضرورة تحليل وفحص أية مشكلة من كافة الزوايا، ومراعاة أن نشاط أي نظام من النظم الفرعية لمنشأة الأعمال، إنما يؤثر ويتأثر بأنشطة باقي النظم الفرعية الأخرى داخل المنشأة، الأمر الذي يبين أهمية وضرورة الأخذ في الاعتبار - لدى فحص وتحليل ودراسة أية مشكلة - كافة آثارها علي جميع قطاعات المنشأة.

- **<u>يعتمد مدخل بحوث العمليات على: تضافر جهود فريق العمل:</u>**

فمن المعروف أن المشكلات التي تواجه منشآت الأعمال، إنما تتميز بأنها مشكلات ذات أبعاد متعددة، سواءً الاقتصادية أوالاجتماعية أوالهندسية أوالسياسية، حيث لا يستطيع أحد الإلمام بكل هذه الأبعاد والجوانب، الأمر الذي يتطلب تكوين فريق من الخبراء في مختلف التخصصات لدراسة المشكلات من كافة جوانبها.

هذا، ويحقق مبدأ الفريق العديد من المميزات، من أهمها: توفير عدد من الأفكار المفيدة لحل المشكلات، ومن ثم إمكانية الوصول إلي أفضل حل ممكن لها، وذلك فضلاً عن أنه يكفل استخدام أحدث الأساليب العلمية المطبقة في مجالات المعرفة المختلفة.

ويلاحظ أن فريق بحوث العمليات، يتكون من مجموعة متكاملة من الخبراء في تخصصات: الإدارة، والمحاسبة، والحاسبات الالكترونية، والرياضيات، والإحصاء، والاقتصاد، والهندسة.

• يعتمد مدخل بحوث العمليات على: النماذج الرياضية فى حل المشكلات:

تعتبر عملية استخدام النماذج من الأعمدة الرئيسة لبحوث العمليات، ويقصد بالنموذج القيام بمحاولة تمثيل نظام مـــا (أو مشكلة ما) تمثيلاً مادياً. ويتم بناء النماذج بهدف فهم أو وصف أو التنبؤ بسلوك ذلك النظام أو تلك المشكلة. ويلاحظ أنه من الضروري، القيام ببناء النماذج لأغراض دراسة النظم، وذلك بسبب صعوبة أو استحالة الرقابة المباشرة علي النظم الفعلية، فضلاً عن أن التعامل مع النظم الفعلية قد تكون تكلفته مرتفعة بصورة كبيرة جداً.

هذا ومن الملاحظ أنه يتم بناء النماذج، في معظم الأحوال ارتكازاً على عدد محدود من المتغيرات التي تمثل سمات أو أركان أونواحي معينة من النظام. ذلك أن النموذج لا يمثل النظام بكافة تفاصيله، بل يركز فقط علي بعض ملامح أو سمات النظام، الأمر الذي يعني أن بناء وتكوين النماذج، يشتمل في غلب الأمر على نوعٍ من التجريد، ومن هنا فمن الواجب أن يكون النموذج المُشَيَّد: محدداً بدقة؛ ومحكماً؛ وموجزاً؛ واقتصادياً؛ وقابلاً للرقابة عليه بيسرٍ وسهولة.

ومن المعروف تعدد أنواع النماذج، حيث توجد: النماذج المادية والتي تتكون من عناصر مادية؛ والنماذج الرمزية، والتي تهدف إلي وصف النظام. ويعتبر النموذج الرياضي من أهم النماذج الرمزية، حيث يتكون من مجموعة علاقات رياضية، تصف كل منها العلاقة بين متغيرات معينة، حيث يتم تشغيل مدخلات النموذج الرياضي، وفقاً للعلاقات الرياضية، بهدف إنتاج مخرجات، من شأنها أن تعمل على تفسير أو التنبؤ بالتغيرات المتوقع حدوثها في النظام.

ويلاحظ أن النماذج الرياضية تعتبرمن أفضل النماذج التجريدية في تمثيلها للنظم الواقعية، وتعتمد مقدرة هذه النماذج علي وصف والتنبؤ بسلوك نظام ما، على مدى دقة تمثيل العلاقات الرياضية لسلوك النظام، كما تعتبر النماذج الرياضية من أكثر النماذج شيوعاً واستخداماً في تطبيقات بحوث العمليات.

- **<u>يعتمد مدخل بحوث العمليات على: استخدام الحاسب الإلكتروني:</u>**

من الملاحظ أن بحوث العمليات تعتمد بصورة رئيسة علي الحاسب الإلكتروني، في القيام بتنفيذ العمليات الحسابية والرياضية المعقدة، واللازمة لحل النماذج والوصول إلي حلول مشكلات الواقع العملي، حيث تتسم المشكلات التي تواجهها منشآت الأعمال، بالتعقيد واشتمالها على العديد من المتغيرات المتشابكة، ومن هنا فإنه يكاد يكون من المستحيل في كثير من الحالات أن تتم معالجة الكثير من هذه المشكلات بدون الاستعانة بالحاسب الإلكتروني،والذي يعمل على توفير وقت الإدارة، في مواجهة مشكلات الواقع العملي والمافسة، وكذلك الدقة المتناهية في تشغيل وحل النماذج.

- **<u>بحوث العمليات وبناء النماذج:</u>**

يعتبر بناء واستخدام النماذج من أهم محاور اهتمام بحوث العمليات، حيث يمكن النظر إلى النموذج على أنه عبارة عن تمثيل مبسط لشيء حقيقي، إما أن يكون ظواهر معينة أو نظام رئيس أو نظام فرعي، بمعنى أن النموذج يمكن اعتباره تجريداً للواقع الحقيقي.

<u>وتتمثل خطوات بناء النماذج في:</u>

<u>أولاً: تجريد الواقع أو محاكاته:</u> عن طريق تكوين فرض، من شأنه أن يوضح العلاقات والارتباطات المنطقية بين عناصر الواقع، ويمثل السمات و الملامح الرئيسة لهذا الواقع، وذلك من خلال بناء نموذج، بما يستلزم اتخاذ مجموعة من القرارات التي يجب التنسيق بينها، مثل:

١- ما هي العناصر الأساسية الخاصة بالواقع، والواجب إدخالها في النموذج؟

٢- ما هي العناصر التي يمكن التغاضي عنها، واستبعادها من النموذج؟

٣- ما هي الصورة أو الشكل الذي يمكن من خلاله صياغة النموذج؟

ثانياً: الاستدلال أو الاستنباط: أي استخدام الأساليب المختلفة اللازمة لحل النموذج واستخراج النتائج منه: وتتوقف هذه الأساليب علي طبيعة النموذج، وشكله وطريقة صياغته. فقد تكون حل المعادلات أو تشغيل برامج الحاسب الالكتروني، أو عمليات رياضية ومنطقية متتابعة، وكل ما من شأنه العمل على حل النموذج.

ثالثاً: تفسير نتائج النموذج: ويتطلب ذلك ضرورة الأخذ في الاعتبار الجوانب التالية:

١- ترجمة ونقل نتائج النموذج إلى الواقع، مع ضرورة المعرفة التامة بأية اختلافات أو تناقضات قائمة بين الواقع والنموذج الذي يمثله، ومحاولة تضييق أية اختلافات تقع بينهما.

٢- مراجعة الفروض التي تم على أساسها بناء النموذج منذ البداية.

٣- التأكد لدى تكوين فروض النموذج، من عدم إغفال أية عناصر جوهرية.

هذا ومن الملاحظ أن النماذج، يمكن تبويبها وتقسيمها إلى عدة أقسام وتبويبات، من أهمها:

١. النماذج المادية أو الطبيعية:

وتمثل هذه النماذج كل العناصر الجوهرية في الواقع بكل خصائصه تمثيلاً دقيقاً ولكن بمقاييس أصغر. ومن أمثلة هذا النوع من النماذج، نماذج السيارات ولطائرات والمباني والمنشآت وتعتبر هذه النماذج أقل تجريداً للواقع، وتستخدم أساسَاً لأغراض الوصف، وهي ذات فائدة محددة في أغراض التنبؤ.

٢. النماذج المناظرة:

وتمثل هذه النماذج عنصراً معيناً، أو مادةً بديلةً، أو وسيلةً ما، لتمثيل عناصر معينة في الواقع، وهي لذلك تعتبر أكثر تجريداً للواقع، إذا ما قورنت بالنماذج المادية. ومن أمثلة هذه النماذج: استخدام النظام الهيدرولكي لاندفاع

الماء، كنظير لتمثيل النظام الكهربائى. كما قد يستخدم أيضاً هذا النظام المائي، لتمثيل نظم النقل والحركة، أو لتمثيل نظم اقتصادية، أو أية نظم أخرى شبيهة. وهنا نلاحظ أنه يسهل تجربة هذا النوع من النماذج، ومن ثم فإنها تفيد في أغراض التنبؤ.

٣. النماذج التصويرية:

وذلك مثل: الخرائط الجغرافية، والصور الضوئية، والرسوم التصميمية، وخرائط التدفق لتشغيل المواد أو المعلومات. وهي أكثر تجريداً للواقع، ومن أهم الأمثلة على ذلك: نموذج النظام المحاسبي، والذي يمثل في صورة مجموعة من الدفاتر والسجلات والحسابات، كافة أوجه نشاط المنشأة، وتدفق السلع والخدمات فيه، ويمدنا بالمعلومات عن معدل التدفق والأداء المحقق والقيم الناتجة، ونلاحظ هنا أن هذا النموذج يعتبر مفيداً في هذه الصورة، على الرغم من أنه لا يعد تمثيلاً حقيقياً للعمليات.

٤. النماذج الرمزية:

وهي من أكثر النماذج شيوعاً واستخداماً في بحوث العمليات، وتعبر هذه النماذج عن الشيء الذي تمثله في صورة رمزية جبرية، أو أعداد أو حروف، وتعرف عادة بالنماذج الرياضية، حيث يتم تمثيل المشكلة محل البحث في صورة علاقات رياضية (معادلات أو متباينات)، وتعكس في صورة كمية: النظام محل الدراسة. وتعد هذه النماذج أكثر أنواع النماذج تجريداً للواقع، وأسهل في المعالجة والتحليل، وتستخدم عموماً في أغراض تفسير المشكلة والتنبؤ بحلها.

وبوجهٍ عامٍ، فإنه يمكن تقسيم النماذج الرياضية في بحوث العمليات، إلى نوعين رئيسين من النماذج:

النوع الأول: النماذج التحديدية (المحددة) : وتتميز هذه النماذج بشمولها علي متغيرات تعتبر مراقبة، وضآلة ومحدودية دور عدم التأكد فيها، بل قد تخلو

منها، ويعتبر النموذج في هذه الحالة، بمثابة نموذج تفسيري وإيضاحي للمشكلة، ويشاع استخدام هذه النماذج التحديدية في معالجة مشكلات الإنتاج ومراقبة المخزون، حيث يكون الطلب علي الإنتاج محدداً ومعروفاً، ويسهل كشف علاقات السببية بين متغيراته.

<u>النوع الثاني: النماذج الاحتمالية:</u> ويتضمن هذا النوع من النماذج: عوامل عدم التأكد بصورة صريحة، ويخلو عادة من المتغيرات المراقبة، ويكون النموذج بمثابة نموذجاً وصفياً للمشكلة، ويستخدم عادة مثل هذا النوع من النماذج، في معالجة المشكلات التسويقية والتنافسية، بسبب ما يتضمنه من عوامل غير مؤكدة، مرتبطة بسلوك العملاء والمنافسين، حيث تستخدم هنا مفاهيم نظرية الاحتمالات بصورة موسعة إلى حدٍ ما.

- **<u>خطوات بناء واستخدام النماذج في بحوث العمليات:</u>**

يمكن تحديد خطوات بناء واستخدام النماذج الرياضية في بحوث العمليات، على النحو الآتي:

١- تكوين المشكلة.

٢- بناء هيكل النموذج.

٣- اشتقاق واستخراج حل المشكلة من النموذج.

٤- اختبار كلٍ من: النموذج والحل المستخرج منه.

٥- تنفيذ الحل.

٦- رقابة كلٍ من: النموذج والحل.

<u>وذلك كما يتبين مما يلي:</u>

١- <u>تكوين المشكلة:</u>

حيث يجب القيام بتحديد المشكلة محل البحث، تحديداً دقيقاً واضحاً. ويقصد بتحديد أو تكوين المشكلة: تشخيصها والتعرف على أسبابها، وعلى عناصرها المختلفة، والعلاقات والارتباطات بين هذه العناصر.

ويتحدد ذلك من خلال تحديد الآتي:

أ- أهداف صانع القرار.

ب- البدائل المختلفة لتحقيق هذه لأهداف.

جـ- العناصر التي تخضع لرقابة صانع القرار؟ بمعنى تحديد ما هي المتغيرات المراقبة.

د- القيود المفروضة.

هـ- المتغيرات الأخري غير المراقبة.

٢- بناء هيكل النموذج:

يلي خطوة تحديد وتكوين المشكلة: خطوة التفصيل الدقيق لهذه المشكلة، والتقرير عن المدخلات الصحيحة للبيانات، والتصميم المناسب للمخرجات، وتحديد كافة العناصر، وتمثيل كافة العلاقات المتداخلة بين هذه العناصر، في صورة معادلات ومتباينات، وهما:

أ- دالة الهدف.

ب- القيود المفروضة.

ويختلف نوع النموذج الرياضي، باختلاف طبيعة المشكلة المطلوب حلها. ونوع البيانات اللازمة لتحليلها، ومدي التعقيد في العلاقات بين عناصرها المختلفة.

ففي مشكلات تخصيص الموارد المحدودة، لتحديد مزيج الإنتاج الأمثل، الذي يساهم في تعظيم الأرباح أو تخفيض التكاليف، فإنه يتم استخدام نموذج البرمجة الخطية؛ أما في مشكلات توزيع المنتجات بين مواقع الإنتاج ومراكز التوزيع الجغرافية، بما يساهم في تخفيض تكاليف النقل إلى أدنى حد ممكن، فإنه يتم استخدام نموذج النقل.

٣- اشتقاق واستخراج الحل من النموذج:

بعد أن يتم تحديد هيكل النموذج الرياضي وبناؤه، فإن الخطوة التالية لذلك، تتمثل في ضرورة التوصل إلى حل المشكلة عن طريق النموذج، بمعنى تحديد الحل الأمثل للنموذج، وتطبيق هذا الحل على المشكلة الحقيقية.

حيث يتم التوصل إلى الحل، من خلال إيجاد القيم المثلى للمتغيرات المراقبة، في ضوء القيم المحددة للمتغيرات غير المراقبة، والتي تعمل على تعظيم أو تخفيض الهدف.

ويتم اشتقاق الحل في معظم الأحوال، من خلال استخدام التحليل الرياضى، الذي توفره أدوات الرياضة التقليدية (مثل حساب التفاضل والتكامل)، أو باستخدام جبر المصفوفات والمحددات، أو باستخدام الإجراء التكرارى. وهنا نلاحظ أن هذا الإجراء يبدأ بحل مبدئي، يتم تحسينه في ضوء مجموعة من القواعد، على أن يتم إحلال الحل المُحَسَّن محل الحل المبدئي، مع تكرار العملية، إلى أن يتم التأكد من عدم إمكانية تحقيق أي تحسين أخر للحل.

٤- اختبار كلٍ من: النموذج والحل المستخرج منه:

من المتعارف والمتفق عليه - قبل أن يوضع الحل المستخرج من النموذج موضع التنفيذ- أنه يجب أولاً اختبار النموذج ذاته، واختبار الحل المستخرج منه أيضاً. حيث نقصد باختبار النموذج: ضرورة التأكد من أن ذلك النموذج في صورته المتكاملة يمثل النظام الذي أعد من أجله، فإذا فشل النموذج في تحقيق ذلك، يصبح من الواجب ضرورة التعرف على الأسباب وتصحيحها.

أما اختبار الحل المستخرج من النموذج، فيقصد به: اختبار صلاحية النموذج، بمعنى التحقق من صحة المعلومات التي يوفرها، وإمكانية الاعتماد عليها في اتخاذ القرارات.

٥- تنفيذ الحل:

عقب التأكد من صحة النموذج وصلاحيته، والجدوي العلمية للحل المستخرج منه، تأتي خطوة وضع هذا الحل موضع التنفيذ والتطبيق، بمعنى تفسير الحل للإدارة المسئولة، وترجمته في صورة إجراءات عمل يسهل فهمها وتنفيذها.

٦- رقابة النموذج والحل:

من الواجب أن يظل النموذج صحيحاً، طالما أن الفروض الأساسية التي بني عليها لم تتغير، ويعتبر ذلك بمثابة إحدى القواعد الرئيسة، كما أن الحل المستخرج منه يظل صحيحاً، طالما أنه يحقق النتائج التي وضع من أجلها النموذج. غير أنه عندما يمتد تطبيق النموذج وتنفيذ الحل المستخرج منه، على مدى فترة طويلة من الزمن، فمن الممكن أن تختلف أو تتغير الظروف التي بُنِيَّ علي أساسها، بما يؤدي إلى تغيير الفروض الأساسية التي بُنِيَّ وفقاً لها النموذج، والتي تتمثل في معظم الأحوال فى:

أ- تغييرات في الهدف.

ب- تغييرات في العناصر أو المتغيرات المراقبة.

جـ- تغييرات في قيم ثوابت المعدلات.

د- تغييرات في العلاقة بين الهدف، والمتغيرات المراقبة، والثوابت.

حيث تتطلب هذه التغييرات، ضرورة إجراء التعديل اللازم علي النموذج وإعادة صياغته وبنائه.

- **مبادئ إعداد النموذج:**

بعد أن تحدد الإطار العام لما نقصده فعلاً ببناء النماذج، يصبح من الواجب ضرورة تحديد مجموعة من المبادئ العامة، التي تحكم ترشيد عملية البناء والتكوين السليم للنموذج، وتحكم تفسير نتائجه وتنفيذ الحلول المستخرجة منه. ومن أهم المبادئ الأساسية لعملية إعداد النماذج واستخدامها:

أولاً: في مرحلة تكوين النموذج وصياغته:

١- عند بناء النموذج وتكوينه: يجب مراعاة أن يكون النموذج بسيطاً بقدر الإمكان.

٢- عند تكوين نموذج لحل مشكلة ما: يجب عدم إخفاء معالم المشكلة لكي تناسب الأدوات والأساليب التي يفضل استخدامها لحلها، بل يجب تحديد هيكل النموذج والأسلوب الأكثر ملاءمة للمشكلة.

٣- يجب التأكد من صحة البيانات التي تدخل في النموذج.

ثانياً: في مرحلة الاستدلال واستخراج النتائج:

١- يجب تنفيذ مرحلة الاستدلال بدقة تامة قدر المستطاع.

٢- عند تنفيذ الاستدلال باستخدام الحاسب الإلكتروني: يجب مراعاة العناية والدقة عند إعداد برامج الحاسب، أي عند تحديد الخطوات اللازمة للعمليات الحسابية والمنطقية، المطلوب إجراؤها علي البيانات التي يتم إدخالها للتشغيل.

ثالثاً: في مرحلة تفسير النتائج وتنفيذ الحلول:

١- عند تفسير نتائج النموذج ووضعها موضع التنفيذ والتطبيق العملي: يجب أولاً التأكد من صحة تلك النتائج، عن طريق مراجعة النموذج، في ضوء معايير منطقية لمدى ملاءمته ومدى صلاحيته، والجدوى العملية للحلول المستخرجة منه.

٢- يجب أن يتم تفسير نتائج النموذج: في ضوء الفروض التي بُنِيَّ عليها وفي ضوء الهدف منه.

٣- لا يمكن أن تحل النماذج محل صانعي القرارات.

٤- يجب أن يكون واضحاً، أن المنفعة الحقيقية من النموذج، لا تتحقق إلا بمشاركة المستخدم النهائي له، وأن تكون هذه المشاركة في كافة مراحل بنائه وتنفيذه.

• بحوث العمليات واتخاذ القرارات:

إن من أهم مقاصد وأهداف بحوث العمليات: العمل على مساعدة صانعي القرار، في معالجة المشكلات المركبة في العالم الحقيقى، وذلك من خلال التأكيد علي تحليل القرار، وتحسين صنع هذا القرار. ويعد هذا المفهوم أساسياً وموحداً في كافة تطبيقات بحوث العمليات.

ويقصد بتحليل القرار: تقسيم وتجزئة المشكلات الكبيرة، إلى أجزاء فرعية يسهل دراستها، حيث يلي دراسة كل جزء فرعي بدقة وعناية: القيام بتركيب النتائج، لكي تعطي رؤية دقيقة للمشكلة الأصلية.

ويقصد بتحسين صنع القرار: القيام بتوجيه الاهتمام نحو عنصر أساسي في كافة مشكلات بحوث العمليات، ألا وهو البدائل المختلفة للأداء، والتي يجب الاختيار فيما بينها، من خلال دراسة وتحليل كل عملية دراسةً علميةً، بهدف الوقوف على حقيقة العلاقة بين بدائل الأداء المختلفة، وتحديد كل بديل، وتحديد مقاييس الأداء التي تعكس أهداف المنشأة، ومن هنا فقد أصبحت بحوث العمليات، أداة محورية هامة ومساعدة للإدارة في ترشيد عملية اتخاذ القرارات.

- **نشأة وتاريخ بحوث العمليات:**

على الرغم من أن مصطلح (بحوث العمليات) قد صيغ خلال الحرب العالمية الثانية، إلا أن العديد من الكتابات العلمية تؤكد أن جذوره العلمية ترجع إلى تاريخ يسبق ذلك بكثير. فقد قدمت النماذج الأولي للبرمجة الرياضية في سنة ١٧٥٩م.، وفي سنة ١٨٧٤م.، كما تطورت الأسس الرياضية للنماذج الخطية مع اقتراب القرن التاسع عشر في سنة ١٨٧٣م.، وفي سنة ١٨٩٦ م.، وفي سنة ١٩٠٣م.

ورغم هذه النشأة المبكرة لبحوث العمليات، والمحاولات الأولى لبعض نماذجها وأساليبها، إلا أنه يؤرخ لها بصفة رسمية ومعترف بها وبصورة شرعية، بتاريخ قيام الحرب العالمية الثانية.

ومع بداية سنة ١٩٣٧م. فلقد كانت هناك حاجة إلى العلماء البريطانيين لتقديم مساعداتهم للقادة، ومع بداية سنة ١٩٣٧م. فقد كانت هناك حاجة إلى العلماء البريطانيين، لتقديم مساعداتهم للقادة العسكريين، في تعلم كيفية استخدام الرادار، في تحديد موقع طائرات العدو. وبسبب المشكلات الفنية والاستراتيجية في زمن الحرب، ونظراً للحاجة الملحة في ذلك الوقت إلى توزيع الموارد المحددة بأكثر الطرق كفاية واقتصادية، وكذلك صعوبة الوصول إلى حلول مناسبة لكل هذه المشكلات من فرد واحد أو حتي من نظام واحد، فلقد قرر عالم الفيزياء البريطاني Blackitt، أن يجمع في سبتمبر ١٩٤٠م. فريق العلماء ذوي الخلفيات العلمية والثقافية المتنوعة، لدراسة هذه المشكلات، دراسة علمية تحليلية وإيجاد الحلول المناسبة لها. وقد عُرِفَ هذا الفريق في بريطانيا باسم Blackitt circus وقد كان هذا الفريق ناجحاً بصورة ملحوظة في تحسين كفاءة العمليات العسكرية؛ الأمر الذي ترتب عليه في سنة ١٩٤١م. إدخال فرق بحوث العمليات على نطاق واسع، في السلاح الجوي الملكي البريطاني، كما حدثت تطورات مشابهة في القوات البرية الملكية البريطانية، الأمر الذي أسفر عن اتجاه دول الحلفاء وفرنسا إلى تطبيق نفس الإتجاه، فقامت بتنظيم فرق بحوث عمليات خاصة بكلٍ منها، وقد عُرِّفَت في المملكة المتحدة تحت مسمى "بحوث علي العمليات العسكرية"، كما عُرِّفَت في الولايات المتحدة تحت عدة أسماء مختلفة مثل: "تحليل العمليات العسكرية"، "تحليل النظم"، "علم الإدارة"، غير أن أكثر الأسماء شيوعاً واستخداماً كان مسمى "بحوث العمليات".

وعقب انتهاء الحرب العالمية الثانية، اتجه كثير من العلماء الذين عملوا في فرق بحوث العمليات العسكرية، ووجهوا انتباههم نحو إمكانيات تطبيق نفس الاتجاه في الأغراض المدنية؛ حيث عاد بعضهم إلى الجامعات، لتوفير بناء راسخ للأساليب التي اكتشفت علي وجه السرعة في زمن الحرب، كما عاد بعضهم إلى الجامعات لتأسيس بناء متكامل للأساليب التي اكتشفت علي وجه السرعة في زمن الحرب، في حين اتجه البعض الأخر نحو تطوير أساليب

جديدة، بينما اتجه فريق ثالث نحو القطاعات المختلفة من الاقتصاد القومي لحل مشكلات الإدارة.

وفي الولايات المتحدة، فقد بدأت الجهود في تاريخ متأخر، إلا أنها حققت أيضاً تقدماً أساسياً في الأساليب الرياضية لتحليل المشكلات العسكرية، غير أنه في أواخر الأربعينيات، فقد قادت الولايات المتحدة ما يمكن أن يُسمى عليه الثورة الصناعية الثانية، وذلك من خلال انتشار الحاسبات الالكترونية.

كما تأسست جمعية بحوث العمليات البريطانية بعد الحرب مباشرة في سنة ١٩٤٧م، وأصبحت تعرف بدءاً من سنة ١٩٥٤م. بجمعية بحوث العمليات الإنجليزية. كما ظهر أكثر من عشرين جمعية أخري لبحوث العمليات في أوربا وأسيا وأفريقيا، وبلغ عدد أعضاء هذه الجمعيات بالآلاف، إلى أن تم تشكيل "اتحاد الجمعيات الدولية لبحوث العمليات"، وذلك قبيل نهاية الألفية الثانية بسنوات معدودة.

حيث تولت هذه الجمعيات، القيام بتنظيم العديد من المؤتمرات الدولية، وإصدار الدوريات العلمية الخاصة بها، فتم إصدار مجلة بحوث العمليات، ومجلة علم الإدارة، حيث ساهم ذلك كله، في تجميع نتائج الدراسات والتطبيقات والأبحاث، وتكوين بناء المعرفة الخاص ببحوث العمليات، بل إنه يمكن القول بانتظار المزيد من التقدم والتطور لهذا الميدان الحديث من البحث العلمى، وبوجه خاص في ظل التطورات المتسارعة وغير المسبوقة، سواءً في ميدان الحاسبات الإلكترونية، أو الأساليب الكمية، أو غير ذلك من نتاج العولمة والتطورات التكنولوجية الحديثة.

وفي ضوء كل ما سبق، فقد يمكن إرجاع هذا التطور والانتشار السريع لبحوث العمليات، إلى العديد من العوامل، من أهمها العوامل الأربعة الآتية:

١. ميكانيكية الإنتاج، وزيادة التخصص وتقسيم العمل الصناعي والإداري أيضاً.

٢. الضغط التنافسي، وحاجة منشآت الأعمال، إلى تحسين الطرق التقليدية في جمع وتحليل البيانات واتخاذ القرارات.

٣. التطور والانتشار السريع في استخدام الحاسب الالكترونى.

٤. استمرار الباحثين في أبحاثهم، ومن ذلك ابتكار George Dantzig في سنة ١٩٤٧م، لطريقة السمبلكس، لحل نموذج البرمجة الخطية.

- **علاقة بحوث العمليات بالمحاسبة:**

من المعلوم أن السلوك الاقتصادي لأية منشأة يعتمد على النظام المحاسبي، والذي يمثل المحور الرئيس في تجميع البيانات عن الأحداث الاقتصادية والمالية في المنشأة، حيث أنه يعد نظام المعلومات الرسمي داخل المنشأة وخارجها، وذلك نظراً لما يلي:

١- تعدد وتنوع وظائف المحاسبة، والتي أصبحت ليست مجرد وسيلة لضمان سلامة حقوق الملاك والمساهمين، بل إنها قد أصبحت بمثابة الطريق نحو أفضل القرارات داخل المنشأة.

٢- زيادة الاحتياجات للمعلومات المحاسبية، سواءً من جانب الإدارة داخل المنشأة، أو من جانب الهيئات والمنظمات الاقتصادية والقانونية والاجتماعية خارج المنشأة.

٣- اعتبار النظام المحاسبي بمثابة حجر الأساس في أحدث مراحل تطور نظم المعلومات، والتي يطلق عليه "النظام الكلي للمعلومات"، حيث أصبح المستشارون من المحاسبين أحد العناصر الرئيسة في هذا النظام، جنباً إلي جنب مع مصممي النظم وواضعي البرامج، وخبراء بحوث العمليات.

ولهذه الأسباب فإن المحاسبة تعتبر وثيقة الصلة ببحوث العمليات، وذلك من الزوايا الآتية:

١- يعد النظام المحاسبي بمثابة حجر الأساس أو المرتكز الرئيس، في توفير مدخلات البيانات اللازمة لنماذج بحوث العمليات.

٢- يقوم النظام المحاسبي بدور جوهري وهام، في بناء وتصميم نماذج بحوث العمليات.

٣- يعد النظام المحاسبي ذا دور ملموس وجوهري، في رقابة ومتابعة وتحليل الحلول المستخرجة من نماذج بحوث العمليات.

▪ مشكلات وأساليب بحوث العمليات:

• تبويب مشكلات بحوث العمليات:

يكاد معظم الكتاب والمؤلفين، يتفقون على أن معظم مشكلات بحوث العمليات تقع في أحد الأقسام الآتية:

١- مشكلات التخصيص.
٢- مشكلات الصفوف.
٣- مشكلات التتابع.
٤- مشكلات المسارات.
٥- مشكلات الإحلال.
٦- مشكلات المنافسة.
٧- مشكلات المخزون.
٨- مشكلات البحث.

أولاً: مشكلات التخصيص:

وهى ثلاثة أنواع:

النوع الأول: وهو النوع الرئيس في مشكلات التخصيص، حيث تكون الموارد اللازمة للإنتاج محدودة، وتتنافس المنتجات فيما بينها على تلك الموارد المحددة.

وتعتبر مشكلة مزيج الإنتاج الأمثل، من أهم وأشهر الأمثلة الشائعة لهذا النوع من المشكلات.

النوع الثانى: ويطلق عليه مشكلات التعيين، ويتحدد هذا النوع من مشكلات التخصيص، عندما يكون هناك مجموعة من الأعمال أو المهام، يجب أداؤها في ظل توافر موارد كافية ومتاحة لأداء هذه الأعمال، غير أن بعضها يمكن أداؤه بطرق أفضل من غيرها، وليس هناك موارد كافية لأداء كل تلك المهام بأفضل الطرق الممكنة.

النوع الثالث: ويطلق عليه مشكلات التوزيع التي ترتبط بمشكلات النقل، أي تخصيص الوحدات التي يتم نقلها من مواقع إنتاج مختلفة، إلي مواقع الطلب أو التوزيع المختلفة، بطريقة تساهم في تخفيض تكاليف النقل إلى أدنى حد ممكن.

هذا ويطلق على أساليب بحوث العمليات التي تستخدم لحل مشكلات التخصيص: البرمجة الرياضية، وتتكون من عدة أنواع من البرمجة الخطية، والبرمجة غير الخطية، وبرمجة الأهداف، والبرمجة الخطية بالأعداد الصحيحة، والبرمجة الديناميكية، وغير ذلك. ويختلف كل نوع من أنواع البرمجة، من حيث البيانات التي يتناولها، ونوع الفروض التي يقوم عليها.

ثانياً: مشكلات الصفوف:

وتعرف مشكلة الصفوف بأنها مشكلة انتظار، وتتحدد المشكلة عن طريق وصول العملاء طبقاً لتاريخ محدد للوصول، وانتظارهم في صف من صفوف الانتظار، حتي يستطيعوا المرور خلال أدوات وتسهيلات الخدمة إلي أن يتم مغادرتهم بعد إتمام خدمتهم.

وتستخدم بحوث العمليات نماذج صفوف الانتظار، لحل مثل هذا النوع من المشكلات، بالإضافة إلي استخدام قواعد التفاضل والتكامل ومفاهيم نظرية الاحتمالات.

ثالثُا: مشكلات التتابع:

وهي تتعلق باختبار قاعدة أو مبدأ، يتم بناءً عليه، أداء مجموعة أنشطة مختلفة تتميز بتتابع فني وتكنولوجي محدد طبقاً لمعيار مناسب لأدائها، ويتمثل في الغالب في تخفيض إجمالي الوقت المستغرق في أداء الأنشطة المختلفة.

هذا ويلاحظ في معظم مشكلات التتابع المركبة، أنه عادة ما تستخدم نماذج شبكات الأعمال، عن طريق أسلوب تقييم ومراجعة البرامج (أو ما يُسمَّى أسلوب بيرت)، وطريقة المسار الحرج في العمليات والأهداف المراد تحقيقها، حسب تواريخ محددة للتسليم، وتكمن المشكلة هنا في تحديد أزمنة

البداية، والمدة اللازمة لأداء كل عملية أو نشاط في المنشأة وتكلفته، بحيث يكون إجمالي وقت وتكلفة أداء العمليات عند أدنى حد ممكن.

رابعاً: مشكلات المسارات:

وهي تتعلق بإيجاد المسار الأمثل، من بين عدة مسارات ممكنة ومتاحة، والمسار الأمثل هنا يُقصد به المسار الذي يخفض المسافة أو الوقت أو التكلفة، بين نقطة أصل معينة وبين موقع معين إلي أدنى حدٍ ممكن.

وتعتبر مشكلة تنقل وسفر رجال البيع: المثال التقليدي لمثل هذا النوع من المشكلات.

وعادة ما يتم حل مثل هذا النوع من المشكلات، باستخدام نماذج أقصى تدفق، ونماذج أقصر طريق.

خامساً: مشكلات الإحلال:

وهي تتكون من نوعين رئيسين من المشكلات: يتعلق النوع الأول منها بالأصول والمعدات كبيرة الحجم وذات التكلفة العالية، والتي تستهلك بعد فترة الاستخدام الاقتصادي، مثل استهلاك الآلات والمعدات والمولدات والسيارات وغير ذلك، حيث تقل كفاية تشغيلها. والمشكلة هنا تتركز في تحديد الوقت الأمثل لإحلال مثل هذه الأصول، بحيث تنخفض إجمالي تكاليف الاستثمار والتشغيل إلي أدنى حد ممكن.

أما النوع الثانى، من مشكلات الإحلال، فيتعلق بالأجزاء الصناعية غير المستهلكة، والتي توقفت توقفاً كاملاً عن العمل وبصورة مفاجئة، وعادة ما تكون هذه الأجزاء صغيره الحجم وأقل تكلفة، مثل تلف مصابيح الإضاءة، وإطارات السيارات، وغير ذلك. حيث تتعلق المشكلة هنا بتحديد سياسة الإحلال المثلى، بمعني إحلال المجموعة الكاملة عند تلف جزء منها، أم أحلال كل جزء على حدة، وأثر ذلك علي تكاليف التشغيل والصيانة.

وتعتبر أساليب البرمجة الديناميكية من أهم الأساليب الشائعة لمعالجة النوع الأول من مشكلات الإحلال، في حين أن النوع الثاني يستخدم في حلها التحليل الرياضي أو الإحصائي، وكذلك نماذج المحاكاة.

سادساً: مشكلات المنافسة:

وتظهر تلك النوعية من المشكلات، عندما يتنافس اثنان أو أكثر من متخذي القرار، علي الحصول علي أكبر حصة سوقية ممكنة، والقرار الذي يتخده منافس ما يتأثر بالقرارات التي يتخذها المنافس الآخر أو عدة منافسين آخرين.

وتعتبر نظرية المباريات، بمثابة الإطار العلمي، الذي يتم في ضوئه تركيب وتكوين وحل معظم المشكلات التنافسية.

سابعاً: مشكلات المخزون:

لا يخفى أن المخزون السلعي قد يمثل موارد عاطلة، يرتبط بها نوعان أساسيان من التكاليف:

١- تكاليف تتزايد بتزايد المخزون.

٢- تكاليف تتناقص بتزايد المخزون.

ومن أهم أمثلة تلك التكاليف: تكاليف الاحتفاظ بالمخزون، والتي تتمثل في: تكاليف الحفظ، والمخازن، والتالف والعادم، والضرائب، والتأمين علي المخزون، والفائدة على رأس المال المستثمر في المخزون، وغير ذلك من التكاليف التي تصحب الاحتفاظ بحجم معين من المخزون.

وقد تطورت الأساليب الرياضية التي تعالج مشكلات المخزون، وأصبحت ذات خصائص متعددة، كما تعتمد أساساً علي استخدام قواعد حساب التفاضل، ونظرية الاحتمالات، ويطبق في حلها طرق البرمجة الخطية والديناميكية وأساليب المحاكاة.

ثامناً: مشكلات البحث:

وهي ترتبط بشكلٍ عامٍ، بتحديد مدى تغطية مجال البحث، أي تحديد حجم العينة، وتحديد نوع هذه التغطية (أي تصميم العينة)، ويترتب عليها نوعان من التكاليف: تكلفة الموارد اللازمة للبحث (أي تكاليف الوقت والمال والباحثين)؛ وتكلفة الخطأ في استكشاف ما يتم البحث عنه بسبب عدم كفاية التغطية لميدان البحث (أي خطأ العينة).

ويطبق خبراء بحوث العمليات نظرية البحث، في حل مثل هذه المشكلات، وفي تحديد المجالات التي يجب البحث فيها وكيفية بحثها.

- **<u>أساليب بحوث العمليات:</u>**

يتسم حقل بحوث العمليات، بأنه قد يتم استخدام أسلوب واحد لمعالجة مشكلة معينة بذاتها، كما قد يتم استخدام نفس الأسلوب لمعالجة أنواع أخرى من المشكلات، ومن هنا فإنه يصبح من الضروري بمكان تعريف كل أسلوب من هذه الأساليب، وذلك على النحو الآتي:

١- <u>نموذج البرمجة الخطية:</u>

وهو عبارة عن: أسلوب رياضي، يعمل على تخصيص الموارد المحددة علي المنتجات المختلفة؛ حيث تكون هذه المنتجات مقيدة بظروف واعتبارات فنية للإمكانيات، والتي يُعَبَّر عنها في صورة معادلات أو متباينات خطية، وذلك لتحديد مزيج الإنتاج الأمثل، الذي يحقق هدف أمثل- في ضوء تلك القيود- قد يتمثل إما في تعظيم الأرباح أو في تخفيض التكاليف إلى أدنى حد، ويتميز هذا النموذج أساساً بالعلاقات الخطية بين المتغيرات، وعادة ما تستخدم طريقة السمبلكس في حل هذا النموذج.

٢- <u>نماذج التوزيع:</u>

وهي عبارة عن: طرق خاصة في مشكلة البرمجة الخطية، وترتبط بمشكلات النقل والتعيين، حيث يهدف نموذج النقل إلى تخصيص الوحدات التى تتم إنتاجها في مواقع إنتاج مختلفة، على عدد من مواقع البيع أو التوزيع

الجغرافية، بطريقة تساهم في تخفيض تكلفة النقل إلى أدنى حد أو تعظيم الربحية. ويتعلق نموذج التعيين، بتعيين عدد من نقط الأصل، علي نفس عدد المواقع، من أجل تحقيق مثالية دالة الهدف التي ترتبط بالتكلفة أو الربح.

٣- نموذج البرمجة الديناميكية:

ويهدف هذا الأسلوب إلى إيجاد الحلول المناسبة، للمشكلات التي تستلزم اتخاذ القرارات التي تتوقف علي بعضها البعض وتتم في تتابع، ويؤثر كل قرار علي القرارات المستقبلية، وتتم هذه التأثيرات في تتابع، ويؤثر كل قرار علي القرارات المستقبلة، والتي تتم أيضاً في تتابع، وتقوم أساساً علي تقسيم وتجزئة المشكلة، إلي أجزاء صغيرة يسهل حلها، على أن يتم إعادة تجميع وتركيب وربط نتائج التحليل مع بعضها البعض، للوصول إلى أفضل حل للمشكلة الأصلية المركبة، ويُعرف ذلك بالحل متعدد المراحل للمشكلات.

٤- نماذج شبكات الأعمال:

وهي تستخدم عادة في إدارة المنشآت كبيرة الحجم، والتي تتضمن عدداً من أوجه النشاط التي ترتبط بها مشكلات مركبة، تتعلق بتخطيط وجدولة ورقابة الأنشطة أو الأعمال، كما يتميز أداء هذه الأنشطة أو الأعمال، بتتابع فني وتكنولوجي محدد، ويتم حل هذه النماذج باستخدام أسلوب تقييم ومراجعة البرامج (أسلوب بيرت) وباستخدام طريقة المسار الحرج.

٥- نماذج صفوف الانتظار:

وتستخدم أساساً من أجل تخفيض وقت العملاء، من أجل الخدمة بما يساهم في تخفيض تكاليف أداء هذه الخدمة إلى أدني حد ممكن.

٦- نماذج نظرية المباريات:

وتستخدم هذه النماذج في المواقف التي تتوقف فيها القرارات التنافسية لمنافس ما، على خطط واستراتيجيات المنافسين الآخرين أو ذوي المصالح المتعارضة؛ سواءً كانت هذه الخطط والاستراتيجيات معروفة، أو يمكن التنبؤ بها، أو غير معروفة على الإطلاق.

٧- **نماذج الإحلال:**

وتستخدم هذه النماذج في التوصل إلى برنامج أو سياسة الإحلال المثلى، سواءً عند الإحلال الكامل للأصول، أو الإحلال الجزئي لها، بما يساهم في تخفيض تكاليف الاستثمار والتشغيل والصيانة إلى أدنى حد ممكن.

٨- **نماذج المخزون:**

وتهدف إلى تخفيض اجمالي تكاليف التجهيز الآلي أو الشراء وتكاليف الاحتفاظ بالمخزون إلى أدنى حد ممكن، وذلك من خلال تحديد كمية الطلب الاقتصادية أو الكمية الاقتصادية للإنتاج، وتحديد عدد مرات الطلب أو المدة التي تفصل بين كل طلب وأخر، كما تساهم أيضاً في تحديد الحد الأدنى للمخزون، في ضوء طول فترة التوريد أو فترة الإنتاج، وتحديد الحد الأعلى للمخزون ونقطة إعادة الطلب.

٩- **نماذج المحاكاة:**

وتعتبر امتداداً طبيعياً لنماذج بحوث العمليات الرياضية والتحليلية؛ وتستخدم في وصف سلوك أو هيكل نظام حقيقي واقعي مركب خلال عدة فترات زمنية ممتدة، حيث تعتبر بذلك عملية بناء أو إنشاء جوهر الحقيقة بدون بلوغ الحقيقة ذاتها، وذلك بما يسهل من إمكانية دراسة وتجربة التفاعلات المركبة والداخلة في نظام معين، والذي قد يكون منشاة أعمال، أو صناعة أو نشاط اقتصادي، أو نظام فرعي من هذه النظم، بحيث يمكن من خلال المحاكاة: دراسة التغيرات في المعلومات أو النظم أو البيئة علي عمليات النظام، على أن يلي ذلك القيام بإجراء تعديلات في النظام، وملاحظة تأثير تلك التعديلات على السلوك الحقيقي للنظام، واختبارها وتقييمها بدون مخاطرة تجربة النظام الحقيقي ذاته.

- **حدود استخدام بحوث العمليات:**

تحيط وتحد بحوث العمليات - كمنهج علمي لحل المشكلات – مجموعة من الحدود، من أهمها:

١) على الرغم من أن بحوث العمليات وأساليبها ونماذجها، تعالج كافة المشكلات التي تخضع للتحليل الكمي؛ فإنه لا يدخل في نطاقها تلك

المشكلات التي لا تخضع للقياس الكمى؛ حيث قد لا يمكن إخضاع كل العوامل والمتغيرات المؤثرة في المشكلة للقياس الكمي.

٢) لا تعمل نماذج بحوث العمليات على توفير الأساس الكامل لاتخاذ كافة القرارات؛ حيث أنها تساعد الإدارة فقط في مواجهة وحل المشكلات التي تواجهها في الواقع العملي، حيث توفر نماذج بحوث العمليات، معلومات كمية غالباً ما تفيد في أغراض اتخاذ القرارات، ويكون القرار النهائي للإدارة؛ الأمر الذي يعني أن خبرة الإدارة والتقدير الشخصي لمتخذي القرارات، من العوامل الهامة للوصول إلي القرار النهائى الرشيد، ومن ثم فإن خبرة الإدارة وتجربتها وحكمها الشخصي، تظل ضرورية ولازمة لإدراك واختيار وتنفيذ النموذج الملائم، والتأكد من صلاحيته واستمرار استخدامه بصورة صحيحة.

٣) يتوقف نجاح تطبيق منهج بحوث العمليات، ليس على مجرد التصميم الصحيح للنموذج الرياضى؛ وإنما يتوقف أيضاً علي مصادر المعلومات والبيانات، المرتبطة بأهداف وكفاءة وخبرة القوى البشرية المسئولة عن جمع تلك المعلومات والبيانات.

٤) إن التطبيق الناجح لبحوث العمليات، لا يمكنه أن يستقل عن استخدام الفن أو الخبرة، فالقوة البشرية المدربة ذات المهارة الفنية والقدرات الذهنية المتميزة، تعتبر ضرورية جنباً إلي جنب مع الكفاءات الإدارية القادرة علي التصور والإبداع، بالإضافة إلي توفير الإمكانيات المادية اللازمة، بمعنى أن التطبيق الناجح لمنهج وأساليب بحوث العمليات يعتمد على توفيق الله تعالى، ثم على توافر مجموعة من المقومات المادية والبشرية (كالحاسبات الإلكترونية والخبراء في مجالات المعرفة المختلفة)، ومن أهم الأشكال العملية لذلك: نظم دعم القرار، والتي تمثل نوعًاً من التفاعل، بين نماذج بحوث العمليات وخبرة ومهارة متخذي القرار، فإن كل ذلك يعتبر بمثابة عوامل حيوية وجوهرية، في تطبيق هذا المنهج العلمي لاتخاذ القرارات.

الفصل الثاني
الإطار العام لأسلوب البرمجة الخطية

- **مفهوم البرمجة الخطية:**

تعتبر وظائف التخطيط من أهم وظائف الإدارة، بمختلف مستوياتها، وذلك بغية إيجاد أفضل الحلول لمشاكل التخطيط العديدة التي تواجه المنشآت على مختلف أنواعها وصورها القانونية وحجم أعمالها: صناعية كانت أو تجارية أو حكومية،...الخ.

وغني عن البيان، أن قرارات التخطيط تتمثل في محاولة الوصول إلى حلول للمشاكل التخطيطية، التي تقوم الإدارة بتحليلها ومواجهتها. ويعتبر أسلوب البرمجة الخطية، من أهم أساليب بحوث العمليات التى تم استخدامها وتطبيقها على نطاقٍ واسعٍ فى مجال التخطيط بوجهٍ عامٍ، وفى مجال التخطيط المالى على وجه التحديد، وذلك فضلاً عن أنه يعتبر من أهم وأكثر أساليب بحوث العمليات شيوعاً واستخداماً فى الحياة العملية، حيث يستخدم أسلوب البرمجة الخطية فى محاولة مواجهة وحل العديد من المشاكل، والتى من أهمها: مشاكل التخصيص (أى تحديد التوزيع الأمثل للموارد الاقتصادية النادرة والمحدودة على الاستخدامات البديلة لها)؛ ويرتكز أسلوب البرمجة الخطية، على كفاءته المرتفعة فى إمكانية التوصل إلى أفضل خطة للمنشأة، من بين مجموعة الخطط البديلة والمتاحة أمامها، حيث يمكن للمحاسبين الإداريين – من خلال استخدامهم لهذا الأسلوب - زيادة درجة كفاءة التخطيط المالى.

هذا وتعتبر البرمجة الخطية، من أهم طرق التحليل الكمى التى شاع تطبيقها واستخدامها فى اتخاذ قرارات التخطيط المثلى، وهى عبارة عن طريقة رياضية منظمة، تتعلق بتخصيص الموارد المحددة من المواد الخام، والعمل، والآلات، والمعدات ورأس المال، بأفضل طريقة ممكنة، على أوجه

النشاط المختلفة والتى تتنافس فيما بينها على تلك الموارد المحدودة، وذلك بقصد تحقيق هدف معين، غالباً ما يتمثل فى معيار اقتصادى مثل: تعظيم الأرباح إلى أقصى حد، أو تخفيض التكاليف إلى أدنى حد ممكن.

ويلاحظ في هذا الصدد أن مصطلح أفضل طريقة ممكنة، يُقصد بها القيام باختيار أفضل بديل، من بين مجموعة من البدائل المتاحة أو البرامج المختلفة، لصنع قرار إداري معين، حيث يتم اختيار أفضل بديل أو برنامج ممكن، بحيث يكون هذا البديل الأفضل، هو الحل الأمثل للمشكلة الرياضية.

كما يلاحظ أيضاً أن البدائل أو البرامج توصف بالخطية، نظراً لوجود علاقات خطية بين كلٍ من: مخرجات النموذج؛ والموارد المحدودة أو المدخلات المختلفة الداخلة في تكوينه.

وتنبع أهمية استخدام نموذج البرمجة الخطية، من ارتباطها الوثيق بعملية إيجاد الحلول المثلى لمشاكل تخطيط الإنتاج، عن طريق: تحديد مزيج الإنتاج الأمثل؛ أو تحديد الكميات الواجب إنتاجها من كل نوع من أنواع المنتجات؛ أو تحديد الحجم الأمثل للإنتاج أو الطاقة التشغيلية للمنشأة.

ولكي يمكننا فهم المقصود بمصطلح " البرمجة الخطية"، فإننا يمكن أن نتناول مفردات المصطلح، كلاً على حدى، حيث يُقصد بلفظ "البرامج": مجموعة الحلول الممكنة للمشكلة، بينما يُقصد بلفظ "الخطية": ثبات العلاقة بين متغيرات المشكلة، والتى تأخذ شكل الخط المستقيم عند تمثيلها بيانياً، أو ثبات العلاقة بين المتغيرات مهما كان مستوى النشاط، الأمر الذى يمكن معه القول بأن أسلوب البرمجة الخطية: ما هو إلا أسلوب رياضى يهدف إلى الوصول إلى الحل الأمثل من بين مجموعة الحلول الممكنة لمشكلة ما، تتسم العلاقة بين متغيراتها بأنها علاقة خطية.

وتعد البرمجة الخطية أحد أساليب البرمجة الرياضية، والتي تشتمل على مجموعة من الأساليب الرياضية المتنوعة، والتي يمكن الاستفادة منها في

معالجة العديد من المشاكل؛ حيث يلائم أسلوب البرمجة الخطية تلك الحالات التي تتسم بخطية العلاقات بين متغيراتها، وتتعامل مع هدف واحد؛ بينما لا يلائم هذا الأسلوب معالجة تلك الحالات التي تتضمن أهدافاً متعددةً.

هذا، ونظراً لأن منشآت الأعمال تسعى – غالباً - إلى تحقيق أهداف متعددة، متفاوتة الأهمية، بل وقد تكون متعارضة؛ فإن ذلك يمكن مواجهته بأسلوب برمجة الأهداف، والذي يُعتبر أسلوباً مناسباً لمعالجة حالات الأهداف المتعددة والمتعارضة وفقاً لجدول أولويات وتفضيلات الإدارة؛ أو بمعنى آخر فإن هذا الأسلوب يصبح مناسباً لتلك الحالات التي يمكن لإدارة المنشأة فيها القيام بتحديد أولويات لأهدافها المختلفة، وأوزان تلك الأهداف.

ومن جهة أخرى، فإن أسلوب البرمجة الخطية متعددة الأهداف، يتعامل مع حالات تعدد الأهداف، ويعمل على الوصول إلى الحل الأمثل، الذي يحقق تلك الأهداف المتعددة، دونما حاجة إلى التحديد المسبق للمستويات المرغوبة لهذه الأهداف أو أوزانها النسبية، ومن هنا فإن أسلوب البرمجة متعددة الأهداف قد أمكنه مواجهة أوجه القصور التي تُنسب لأسلوب برمجة الأهداف.

بل إنه يمكن القول، بأن هناك مجموعة متكاملة من الأساليب الرياضية، تقع ضمن مجموعة البرمجة الرياضية، من أهمها: أسلوب البرمجة غير الخطية: والذي يفضل استخدامه في حالة توافر علاقات غير خطية بين متغيرات المشاكل؛ وكذلك أسلوب البرمجة بالوحدات الصحيحة: والذي يفضل استخدامه في الحالات التى لا تسمح بالحلول الكسرية؛ وأسلوب البرمجة الاحتمالية: والذي يفضل استخدامه في حالة ما إذا كانت البيانات المتاحة عن متغيرات المشكلة غير مؤكدة (احتمالية).

- **<u>الشروط الواجب توافرها فى مشاكل البرمجة الخطية:</u>**

يقوم نموذج البرمجة الخطية على مجموعة من الاشتراطات، التي يلزم توافرها لإمكانية تطبيقه وحله، حيث يشترط ضرورة أن تتوافر في المشاكل المطلوب حلها بالبرمجة الخطية، مجموعة من الشروط، ومن أهمها:

١- أن يكون هناك هدفاً محدداً لحل المشكلة، وأن يكون من الممكن صياغة هذا الهدف بصورة رياضية.

٢- أن معيار اختيار أفضل القيم لمتغيرات القرار، يتم وصفه عن طريق دالة خطية تحتوي على هذه المتغيرات،، وتُعرف هذه الدالة بأنها دالة الهدف، والتي قد تتمثل في:تعظيم الأرباح، أو تخفيض (تدنية) التكاليف.

٣- أن متغيرات القرار، التي تدخل في بناء المشكلة: يجب أن تكون متغيرات غير سالبة، فيجب ألا يظهر في حل نموذج البرمجة الخطية قيم سالبة، وذلك ما يعرف بشرط عدم السالبية، حيث لا يعقل أن يتضمن الحل مثلاً إنتاج (ـ ١٠) من منتج ما، حيث أنه لا يمكن إنتاج وحدات سالبة، بل يجب أن تكون موجبة، بمعنى أن تكون قيمتها الجبرية أكبر من أو تساوي الصفر.

٤- يجب أن يكون للمشكلة مجموعة من الحلول الممكنة، أو بمعنى آخر أن يكون هناك أكثر من بديل لحل المشكلة، وإذا كان للمشكلة حل واحد أو بديل واحد فلن تكون هناك مشكلة ولا يوجد مبرر لاستخدام أسلوب البرمجة الخطية. كما يشترط وجود نطاق محدد لمجموعة الحلول البديلة الممكنة للمشكلة.

٥- أن تكون الموارد المتاحة للمنشأة محدودة، حيث إن ندرة الموارد تؤدي إلى نشأة مشكلة التوزيع الأمثل لها، وأن يتم التعبير عن قواعد العمل التي تحكم عملية تخصيص الموارد المحدودة، في صورة مجموعة من المعادلات أو المتباينات الخطية، يطلق عليها مجموعة القيود.

٦- أن يكون من الممكن صياغة العلاقات بين المتغيرات المختلفة في صورة رياضية، بحيث يمكن وصف المشكلة وكل العلاقات بين المتغيرات رياضياً، بمعنى ضرورة أن يكون من الممكن القياس الكمي لأهم المتغيرات المؤثرة على المشكلة، وإمكانية تمثيل المشكلة في صورة معادلات أو متباينات خطية (أي من الدرجة الأولى).

▪ مجالات التطبيق العملي لأسلوب البرمجة الخطية:

اتسع مجال استخدام أسلوب البرمجة الخطية – باعتباره من أكثر أساليب بحوث العمليات استخداماً - فى حل العديد من المشاكل، خاصة المشاكل الإدارية القابلة للصياغة في هيئة نموذج برمجة خطية. ولعل من أهم تطبيقات أسلوب البرمجة الخطية في منشآت الأعمال:

١- تحديد التشكيلة المثلى للمنتجات.

٢- مشاكل النقل.

٣- تحديد المزيج الأمثل للعناصر أو المدخلات.

٤- إعداد جداول تشغيل الآلات.

٥- جدولة الإنتاج، وتخطيط المخزون السلعي.

٦- مشاكل التخطيط المالي، وإعداد الموازنات التخطيطية.

▪ الفروض الأساسية لنموذج البرمجة الخطية:

يرتكز نموذج البرمجة الخطية، على مجموعة من الفروض، من أهمها:

١- فرض العلاقات الخطية:

تتضمن أي مشكلة من مشاكل البرمجة الخطية مجموعة من الأنشطة، بحيث يحتاج كل نشاط منها إلى مجموعة من المدخلات، ويترتب عليه مجموعة من المخرجات؛ فعلى سبيل المثال، فإن أنشطة مشكلة تحديد تشكيلة المنتجات المثلى، تتمثل في المنتجات التي يمكن للمنشأة إنتاجها، ويتطلب إنتاج كل منتج مجموعة من الموارد تتمثل في عناصر الإنتاج المختلفة اللازمة، كما يترتب على نشاط إنتاج أي منتج مخرجات معينة، تتمثل في: المنتج الذي يمكن بيعه، وتحقيق الربح.

وبناءً على ذلك، ففي نموذج البرمجة الخطية، فإنه يمكن استخدام أي هدف بشرط أن يكون قابلاً للصياغة في صورة رياضية، حيث يلاحظ أن أكثر

الأهداف شيوعاً في نموذج البرمجة الخطية، في الحياة العملية: هدف تعظيم الربح؛ أوهدف تخفيض التكاليف إلى أدنى حد ممكن؛ حيث تتكون دالة الهدف من مجموعة متغيرات تمثل الأنشطة المختلفة (أو ما يطلق عليها: متغيرات القرار).

هذا، وقد تتمثل معاملات المتغيرات في دالة الهدف فى ربح أو تكلفة وحدة النشاط، وذلك بالطبع بحسب الهدف المرغوب تحقيقه، حيث نلاحظ هنا أنه لكي تكون دالة الهدف خطية، فإنه معاملات المتغيرات في دالة الهدف يجب أن تكون ثابتة (أي لا تتغير بتغيرات مستوى النشاط)، ولذلك فإننا نستخدم: عائد المساهمة أو هامش ربح الوحدة (وليس صافى الربح الوحدة) في حالة ما إذا كان الهدف هو تعظيم الربح، كما نستخدم: التكلفة المتغيرة للوحدة فى حالة ما إذا كان الهدف هو تخفيض التكاليف إلى أدنى حد ممكن.

ويُقصَد بالخطية في هذا السياق: أن يتم تمثيل المشكلة في صورة دوال ومعادلات ومتباينات من الدرجة الأولى، أى أن تكون جميع المتغيرات ذات الأس واحد (مرفوعة لأس واحد)؛ وألا توجد متغيرات مضروبة في متغيرات أخرى، ومن ثم فإنه يمكن تمثيلها في صورة خطوط مستقيمة.

٢- فرض الهدف الوحيد:

يرتكز نموذج البرمجة الخطية، على افتراض أن منشأة الأعمال، تهدف إلى تحقيق هدف واحد، قد يكون تعظيم الربحية، أو تخفيض أو تدنية التكاليف. غير أنه الواقع العملي، قد نجد أن مثل هذا الافتراض غير قائم، حيث تسعى منشآت الأعمال في الغالب، إلى تحقيق مجموعة أهداف، وهنا يصبح من الأنسب استخدام نماذج رياضية تلائم حالات الأهداف المتعددة، مثل: نموذج البرمجة الخطية متعددة الأهداف، أو نموذج برمجة الأهداف، أو غيرهما من النماذج الرياضية التي تسمح بتعدد أهداف النموذج المطلوب التوصل إلى حله.

٣ـ فرض القابلية للتجزئة:

ويرتكز هذا الفرض على إمكانية أن يتضمن الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية قيماً كسرية؛ وكذلك الحال بالنسبة للموارد (أو المدخلات)، فعلى سبيل المثال: فقد يتمثل الحل الأمثل لإحدى مشاكل البرمجة الخطية، في: إنتاج ٢١.٧٥ وحدة من أحد المنتجات، ويحتاج ذلك إلى ٤٣.٥ ساعة عمل مباشر، و ١١.٢٥ كيلو جرام من مادة خام معينة.

وترتيباً على ذلك، فإنه إذا كانت طبيعة المشكلة لا تقبل الحلول الكسرية، مثلما هو عليه الحال فى مشكلة القرارات الاستثمارية والمفاضلة بين الاستثمارات البديلة (حيث لا يمكن اتخاذ قرار بقبول ٢.٥ أو ٢.٢٥ أو ١.٥ أو ١.٢٥ أو ١.٧٥ مشروع استثماري من بين المشروعات المعروضة للدراسة واختيار إحداها): ففي مثل تلك الحالات، لا يصلح استخدام نموذج البرمجة الخطية، وإنما قد يتناسب مع مثل تلك الحالات، استخدام نموذج البرمجة بوحدات صحيحة.

٤ـ فرض التأكد التام:

حيث يعتمد نموذج البرمجة الخطية، على فرض رئيس، يتلخص في أن جميع معالم النموذج معلومة على وجه التأكيد، أي أنها محددة في صورة قيم وحيدة محددة، وليست في صورة توزيعات احتمالية؛ ويسري ذلك أو ينطبق على كافة معالم النموذج، سواءً: معاملات المتغيرات في دالة الهدف؛ أومعاملات المتغيرات في القيود التي تمثل الموارد المتاحة؛ أو الكميات المتاحة من تلك الموارد.

- **تكوين نماذج البرمجة الخطية لتعظيم الأرباح:**

يتم تكوين وصياغة نموذج البرمجة الخطية لتعظيم الأرباح وفقاً للخطوات الآتية:

- **الخطوة الأولى:**

تعيين متغيرات القرار الذي يجب اتخاذه، وهي المتغيرات المجهولة التي يجب تحديد القيم المثلى لها، والتعبير عنها في صورة رموز جبرية.

- **الخطوة الثانية:**

تحديد كافة قيود (حدود) المشكلة محل الدراسة، والتي تتمثل في الموارد المحدودة، بحيث يتم التعبير عنها في صورة معادلات أو متباينات خطية، بحيث تصبح بمثابة دالات خطية لمتغيرات القرار المجهولة.

- **الخطوة الثالثة:**

تحديد الهدف أو معيار القرار والتعبير عنه، كدالة خطية لمتغيرات القرار، وهذا الهدف قد يتمثل في تعظيم الأرباح؛ أو في تدنية أو تخفيض التكاليف.

√ هذا ولكي يمكننا فهم طبيعة نموذج ومشاكل البرمجة الخطية، أن نقوم بتقسيم مشكلة البرمجة الخطية، إلى مرحلتين رئيستين:

المرحلة الأولى: صياغة النموذج.

المرحلة الثانية: حل النمـــــوذج.

حيث تعتبر مرحلة الصياغة ذات أهمية كبيرة، وذلك بسبب أن مدى سلامة وصحة الحل (ومن ثم فعالية أسلوب البرمجة الخطية)، إنما تعتمد على الله تعالى أولاً، ثم على درجة دقة وسلامة صياغة النموذج. وللمحاسب الإداري الذي يعمل ضمن فريق بحوث العمليات، دور رئيس لا يمكن تجاهله في مرحلة أو عملية صياغة النموذج.

في حين أن مرحلة حل النموذج، وعلى الرغم من ارتفاع درجة أهميتها وخطورتها، إلا أنها لم تعد تمثل مشكلة صعبة، وذلك بعد انتشار وتطورعملية استخدام الحاسبات الآلية، وظهور المزيد من البرامج الجاهزة المتخصصة في مجال بحوث العمليات عموماً، وفي مجال البرمجة الخطية بوجه خاص.

- **مكونات نموذج البرمجة الخطية:**

تشترك كافة مشاكل البرمجة الخطية، في أنها تتضمن هدفاً محدداً يتم السعي نحو الوصول إلى القيمة المثلى له، في حدود الموارد والإمكانيات

المتاحة للمنشأة؛ ومن هنا فإننا يمكننا القول بأن نموذج البرمجة الخطية يتكون من قطاعين أو جزئين رئيسين:

١ ـ دالة الهدف.

٢ ـ القيود.

١- دالة الهدف:

فإذا كان الهدف من نموذج البرمجة الخطية للمشكلة محل الدراسة، يتمثل في تعظيم الربح، وكانت المنشأة صاحبة تلك المشكلة، تنتج منتجين: $س_١$، $س_٢$، على سبيل المثال، وكان عائد مساهمة الوحدة من $س_١$= ٣٣ جنيهاً، ومن $س_٢$ = ٥٥ جنيهاً، فإننا يمكننا صياغة دالة الهدف في هذه الحالة على النحو الآتي:

تعظيم ر = ٣٣ $س_١$ + ٥٥ $س_٢$

حيث ر = عائد المساهمة الكلي للمنشأة.

ويلاحظ أننا استخدمنا عائد مساهمة الوحدة، وليس صافي ربح الوحدة، كمعاملات للمتغيرات في دالة الهدف، وذلك لكي تكون هذه الدالة دالةً خطيةً، حيث أن صافي ربح الوحدة غير ثابت، أي أنه ليس خطياً في علاقته بحجم النشاط.

وذلك في الوقت الذي تتوافر فيه خاصية الخطية، في العلاقة القائمة بين عائد مساهمة الوحدة، وحجم النشاط.

وإذا كان الهدف النهائي للمنشأة، يتمثل في تحقيق أقصي أرباح كلية ممكنة، فإنه يمكن إثبات أن تعظيم عائد المساهمة الإجمالي للمنشأة، يؤدي في نفس الوقت إلى تعظيم صافي الربح، وذلك بسبب ثبات مستوى التكاليف الثابتة.

٢- القيود:

يفصح الواقع العملي، عن مواجهة منشآت الأعمال، لمجموعة من القيود، والتي قد تتمثل في أو تعبرعن ندرة الموارد والإمكانيات المتاحة للمنشأة، أو عن احتياجات السوق والكميات القصوى التي يمكن أن يستوعبها من منتجات المنشأة، كما قد تعبر بعض القيود عن بعض السياسات والاعتبارات الاجتماعية، أو بعض نوعيات علاقات الارتباط بين متغيرات القرار في النموذج.

وتتضمن المجموعة الأولى من القيود: الموارد والإمكانيات المحدودة المتاحة للمنشأة، مثل المواد الخام والطاقة الآلية والبشرية، فإذا افترضنا أن الطاقة الآلية المتاحة لإحدى منشآت الأعمال مليون ساعة سنوياً، وكانت تلك المنشأة تستطيع إنتاج ثلاث منتجات $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$، وكانت الوحدة من المنتج $س_١$ تحتاج إلى ٧ ساعات من الطاقة الآلية، والوحدة من المنتج $س_٢$ تحتاج إلى ٩ ساعات، والوحدة من المنتج $س_٣$ تحتاج إلى ١١ ساعة، فإنه يمكن صياغة قيد الطاقة الآلية على النحو الآتي:

$$٧ س_١ + ٩ س_٢ + ١١ س_٣ \leq ١,٠٠٠,٠٠٠$$

ويُقصد بذلك أن كميات الإنتاج من المنتجات: $س_١$ ، س، $س_٣$ ، والتي سيتضمنها الحل الأمثل للنموذج، يجب ألا تزيد احتياجاتها الكلية من ساعات الطاقة الآلية، عن ١,٠٠٠,٠٠٠ ساعة.

وذلك في حين أن القيود الخاصة باحتياجات السوق أو الطاقة التسويقية، إنما تعبر عن الحدود القصوى لما يمكن أن تبيعه المنشأة في السوق من كل منتج من المنتجات، في حالة وجود مثل تلك الحدود. فإذا افترضنا أن الحد الأقصى لما يمكن أن تبيعه إحدى منشآت الأعمال، من المنتج $س_١$ هو ٤٥٠,٠٠٠ وحدة فإنه يمكن صياغة ذلك رياضياً على النحو الآتي:

$$س_١ \leq ٤٥٠,٠٠٠$$

في حين أن القيود الخاصة بالسياسات والاعتبارات الاجتماعية، تعكس بعض السياسات التي تلزم بها الدولة منشآت الأعمال، وذلك وفاءً لبعض الاعتبارات السياسية أو الاقتصادية أو الاجتماعية. وهنا نلاحظ أن نموذج البرمجة الخطية، يتضمن إنتاج المنتجات الأكثر ربحية، فإذا كانت بعض المنتجات التي تنتجها المنشأة، تمثل سلعاً إستراتيجية أو شعبية، فإن الحل الأمثل للنموذج لن يتضمن إنتاج هذه المنتجات، أو إنتاجها بكميات لا تفي بحاجات المجتمع؛ ومن هنا فإن الدولة قد تفرض علي مثل تلك المنشآت ألا يقل إنتاجها من سلع معينة عن حدود معينة؛ فإذا افترضنا أن الدولة قد قامت بإلزام إحدى منشآت الأعمال، بألا يقل إنتاجها من المنتج $س_{ه}$ عن ٦٠٠,٠٠٠ وحدة، فإنه يمكن صياغة هذا القيد، في مثل هذه الحالة، على النحو الآتي:

$س_{ه}$ ≤ ٦٠٠,٠٠٠

وأخيراً، فإن المجموعة الأخيرة من القيود تمثل: علاقات الارتباط الفني أو الاقتصادي بين متغيرات القرار؛ فقد يرتبط إنتاج سلعة ما فنياً بإنتاج سلعة أخرى، كما قد يكون الارتباط اقتصادياً، بمعني أن العائد من إنتاج سلعة ما، يتأثر بإنتاج أو عدم إنتاج سلعة أخرى ضمن تشكيلة منتجات المنشأة. فإذا افترضنا أن الآلات الحالية للمنشأة تقوم بإنتاج المنتجين $س_{١}$ ، $س_{٢}$ بالتوازي، بمعني أن كل وحدة يتم إنتاجها من $س_{١}$ لا بد من إنتاج وحدة من $س_{٢}$ في نفس الوقت، فإن هذا الارتباط الفني يمكن صياغته في صورة القيد الآتي:

$س_{١} = س_{٢}$

- **الصياغة العامة لنموذج البرمجة الخطية:**

تأخذ الصياغة العامة لنموذج البرمجة الخطية الصورة الآتية:

المطلوب الوصول إلي أقصى أو أدنى قيمة للدالة الآتية:

د (ر) = $ر_{١} س_{١}$ + $ر_{٢} س_{٢}$ +......... $ر_{ن} س_{ن}$ (١)

في ظل القيود التالية:

أ$_{م١}$ س$_{١}$ + أ$_{م٢}$ س$_{٢}$ +.......أ$_{م ن}$ س$_{ن}$ ≥ أو ≤ ك$_{م}$ (٢)

س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ،.......... س$_{ن}$ ≤ صفر (٣)

حيث تمثل:

د(ر): دالة الهدف المطلوب الوصول إلى قيمتها المثلى، سواءً كانت أقصى قيمة ممكنة، أو أدنى قيمة ممكنة.

ر$_{١}$ ،..... ر$_{ن}$: معاملات حسابية، تعبر عن مدى مساهمة متغيرات القرار، في تحقيق دالة الهدف.

س$_{١}$ ،...... س$_{ن}$: متغيرات القرار.

أ$_{١١}$.... أ$_{م ن}$: معاملات حسابية، تمثل معاملات متغيرات القرار في القيود.

ك$_{١}$..... ك$_{م}$: القيم المطلقة للقيود، وهي تعبر عن الكميات المتاحة من الموارد، ويطلق عليها قيم الطرف الأيسر للمتباينات.

- **<u>خطوات صياغة نموذج البرمجة الخطية:</u>**

تعد مرحلة الصياغة، من أهم مراحل حل مشاكل البرمجة الخطية؛ حيث تتوقف سلامة وصحة حل النموذج (كفاءة ونجاح أسلوب البرمجة الخطية)، على توفيق الله تعالى، ثم على سلامة صياغة النموذج.

وإذا كان حل النموذج يتم وفقاً لخطوات محددة وواضحة، كما قد يتم استخدام الحاسبات الآلية، فإنه لا توجد قواعد محددة تحكم عملية صياغة النموذج، حيث تعتمد الصياغة علي خبرة وكفاءة مصمم النموذج وقدرته علي التفكير والتحليل المنطقي السليم.

- **<u>وتتكون عملية صياغة النموذج إلى الخطوات الآتية:</u>**

١- دراسة المشكلة.

٢- تحديد متغيرات القرار.

٣- صياغة دالة الهدف.

٤- صياغة القيود.

<u>وذلك كما يتبين مما يلي:</u>

١- <u>دراسة المشكلة:</u>

فمن المعلوم أن الخطوة الأولي لحل أية مشكلة، تتمثل في دراسة تلك المشكلة من كافة جوانبها وأبعادها، ومن ثم فإنه يمكن تحديد الهدف المطلوب تحقيقه، بالإضافة إلى العوامل والعناصر الواجب تحديد قيمتها لتحقيق ذلك الهدف.

٢- <u>تحديد متغيرات القرار:</u>

حيث تتمثل متغيرات القرار في كافة الأنشطة، التي يمكن أن تقوم بها المنشأة وتؤدي إلي تحقيق الهدف، حيث تتمثل متغيرات القرار في كافة البدائل التي يمكن أن تؤدي إلي تحقيق الهدف؛ وفي مشاكل تحديد تشكيلة المنتجات المثلى على سبيل المثال، فإن متغيرات القرار تتمثل في المنتجات التي يمكن للمنشأة القيام بإنتاجها، ويعمل نموذج البرمجة الخطية في مثل هذه الحالة، علي الوصول إلي القيمة المثلى لدالة الهدف، ومن الواجب هنا ضرورة ملاحظة أن تحديد متغيرات القرار يجب أن يتم بدقة، لأن وقوع أي خطأ في ذلك، من شأنه أن يعمل على صياغة النموذج بطريقة غير صحيحة.

٣ - <u>صياغة دالة الهدف:</u>

حيث يجب ملاحظة أن صياغة دالة الهدف، تستلزم ضرورة تحديد مساهمة كل متغير من متغيرات القرار في تحقيق الهدف، حيث تُسمى هذه المساهمات: معاملات المتغيرات في دالة الهدف.

فإذا كان الهدف يتمثل في تعظيم الربح، وكانت متغيرات القرار عبارة عن المنتجات $س_{١}$ ، $س_{٢}$....... $س_{ن}$ ، ففي هذه الحالة فإننا يمكن أن نستخدم عائد أو هامش المساهمة الوحدة من المنتج، كمعاملات في دالة الهدف، وذلك تحقيقاً لشرط شرط الخطية؛ وإذا رمزنا لعائد أو هامش المساهمة للوحدة من المنتج بالرمز $ر_{و}$ فإنه يمكن صياغة دالة الهدف كما يلي:

المطلوب تعظيم قيمة الدالة التالية:

$$ر = ر_{1} س_{1} + ر_{2} س_{2} + ... ر_{ن} س_{ن}$$

حيث تمثل $ر_{1}$ هامش مساهمة الوحدة من المنتج $س_{1}$ ، كما يمثل $س_{1}$ عدد وحدات هذا المنتج؛ ومن ثم فإن $ر_{1} س_{1}$ تعبر عن: هامش مساهمة المنتج الأول أو مقدار مساهمة المنتج الأول في هدف ربحية المنشأة ككل.
وتمثل (ر): مجموع هامش مساهمة كل المنتجات، أو هامش المساهمة الإجمالي للمنشأة ككل؛ والمطلوب من النموذج تحديد القيم المثلى لمتغيرات القرار ($س_{1}$ ، $س_{2}$ ،........، $س_{ن}$)، والتي تؤدي إلى الوصول إلى القيمة القصوى لدالة الهدف (ر).

٤- <u>صياغة قيود المشكلة:</u>

وهنا يجب أن نلاحظ أن صياغة قيود المشكلة، تستلزم ضرورة حصر كافة القيود المحيطة بالمشكلة، سواءً كانت قيوداً خاصة بالموارد والإمكانيات المحدودة المتاحة للمنشأة، أو قيوداً خاصة بالطاقة التسويقية أو بسياسات اقتصادية أو اجتماعية أو بعلاقات ارتباط فني أو اقتصادي بين متغيرات القرار.
<u>وبعد أن نقوم بحصر القيود، فإننا يجب أن نحدد الآتي:</u>

أ- <u>معاملات متغيرات القرار في القيود أو معاملات المدخــــلات:</u> فإذا ما أخذنا حالة <u>مشاكل تحديد تشكيلة المنتجات المثلى، على سبيل المثال، فإننا نجد أنه بالنسبة للقيود التي تعكس الموارد المحدودة المتاحة للمنشأة، فإن معاملات متغيرات القرار في تلك القيود تتمثل في: احتياجات وحدة المنتج من كل مورد من الموارد المحدودة المتاحة،</u> فعلي سبيل المثال: إذا كانت الوحدة من المنتج الأول ($س_{1}$) تحتاج إلي ٢٧ ساعة من ساعات العمل المباشر، ٧.٥ كيلو جرام من المادة الخام أ، و ١١ جرام من المادة الخام (ب)، فإن المعاملات الحسابية: ٢٧، ٧.٥ ، ١١ تسمى: معاملات المتغير ($س_{1}$) في القيود والتي تمثل الإمكانيات المتاحــــة من ساعات العمل المباشر، والمادتين الخام أ، ب علي التوالي.

ب- تحديد الكميات المتاحة من الموارد:

ويلخص الجدول التالي عملية صياغة القيود، حيث يمكن من خلاله أن نقوم بعملية تلخيص لكلٍ من: القيود ومعاملات متغيرات القرار في القيود والكميات المتاحة من الموارد (قيم الطرف الأيسر للمتباينات).

متغيرات القرار / الموارد	$س_1$ $س_2$ .... $س_ن$	الكميات المتاحة من الموارد
ساعات العمل المباشر مادة خام أ مادة خام ب ... الخ	معاملات متغيرات القرار في القيود	

واعتماداً على الله تعالى، ثم على الجدول السابق، فإننا يمكننا أن نقوم بصياغة العلاقة الكمية، بين متغيرات القرار والقيود، في صورة معادلات أو متباينات خطية.

- **أمثلة تطبيقية على كيفية صياغة نموذج البرمجة الخطية:**
- **مثال ١ـ مشكلة تشكيلة المنتجات المثلى:**

تنتج إحدى المنشآت أربع منتجات، ويمر كل منتج منهم بمرحلتين صناعيتين هما: مرحلة التقطيع، ومرحلة التشطيب، ويوضح الجدول الآتي الوقت اللازم لإنتاج الوحدة من كل منتج في كل مرحلة:

لمنتجات / المراحل	المنتج الأول	المنتج الثاني	المنتج الثالث	المنتج الرابع
مرحلة التقطيع	٧	٦	٩	٨
مرحل التشطيب	٥	٨	٧	٦

هذا، وتبلغ الساعات المتاحة في مرحلة التقطيع ١٩٠٠ ساعة أسبوعيا وفي مرحلة التشطيب ١٤٠٠ ساعة أسبوعيا، وفيما يلي البيانات المتوافرة عن أسعار البيع والتكاليف المتغيرة للوحدة من كل منتج:

المنتجات / بيانات المنتجات	المنتج الأول	المنتج الثاني	المنتج الثالث	المنتج الرابع
سعر البيع	٢١	٢٣	٢٨	٣٤
تكاليف الإنتاج:				
تكلفة المواد المباشرة	٣	٥	٦	٤
التكلفة المتغيرة للتقطيع	٥	٤	٨	٨
التكلفة الثابتة للتقطيع	٢	٣	٥	٧
التكلفة المتغيرة للتشطيب	٦	٨	٦	٦
التكلفة الثابتة للتشطيب	٧	٦	٧	٩

- **والمطلوب: صياغة نموذج البرمجة الخطية لتحديد تشكيلة المنتجات المثلى بما يحقق أقصى ربح ممكن.**

✓ **نلاحظ هنا أننا يمكننا القيام بصياغة نموذج البرمجة الخطية – في ظل الخطوات المبينة سابقاً – وذلك على النحو الآتي:**

١- دراسة المشكلة:

تتمثل هذه المشكلة في تحديد تشكيلة المنتجات المثلى، حيث يوجد أمام هذه المنشأة مجموعة بدائل تتمثل في المنتجات الممكن إنتاجها، وتتمثل المشكلة في تحديد تشكيلة المنتجات المثلى من بين هذه المنتجات، وبحيث تحقق أقصى ربح ممكن في حدود الموارد والإمكانيات المحدودة المتاحة للمنشأة.

٢- تحديد متغيرات القرار:

تتمثل متغيرات القرار في هذه المشكلة في الآتي:

- إنتاج وبيع المنتج الأول، ويرمز له بالرمز $س_١$ للتعبير عن كمية الإنتاج والمبيعات من هذا المنتج.

- إنتاج وبيع المنتج الثاني، ويرمز له بالرمز $س_٢$.

- إنتاج وبيع المنتج الثالث، ويرمز له بالرمز $س_٣$.

- إنتاج وبيع المنتج الرابع، ويرمز له بالرمز $س_٤$.

٣- صياغة دالة الهدف:

في هذا المثال؛ وترتيباً على أن الهدف هنا يتمثل في تعظيم الربح: فإن معاملات متغيرات القرار في دالة الهدف تتمثل هنا في: هامش مساهمة الوحدة من كل منتج – حيث يمكن حساب هامش المساهمة عن طريق طرح التكاليف المتغيرة للوحدة من سعر بيع الوحدة – وذلك كما يتبين مما يلي:

المنتجات / بيانات المنتجات	المنتج الأول $س_١$	المنتج الثاني $س_٢$	المنتج الثالث $س_٣$	المنتج الرابع $س_٤$
سعر بيع الوحدة	٢١	٢٣	٢٨	٣٤
(–) التكلفة المتغيرة للوحدة	(١٤)	(١٧)	(٢٠)	(١٨)
= هامش مساهمة الوحدة	٧	٦	٨	١٦

وعلى ذلك فإننا نستطيع صياغة دالة الهدف على النحو الآتي:

المطلوب تعظيم الدالة:

$$ر = ٧ س_١ + ٦ س_٢ + ٨ س_٣ + ١٦ س_٤$$

٤- صياغة قيود المشكلة:

تتمثل الموارد المتاحة في هذه المشكلة في الطاقة المتاحة في مركزي: التقطيع والتشطيب، وتتطلب صياغة القيود ضرورة تحديد الآتي:

أ- معاملات متغيرات القرار في القيود وتتمثل في احتياجات وحدة المنتج من الساعات في كل مرحلة من مراحل الإنتاج: حيث يحتاج المنتج الأول إلى: ٧ ساعات تقطيع، ٥ ساعات تشطيب، وعلى نفس هذا النمط يمكننا تحديد هذه المعاملات لباقي المنتجات.

ب- الكميات المتاحة من الموارد: وهي: ١٩٠٠ ساعة تقطيع؛ و١٤٠٠ ساعة تشطيب أسبوعيا.

ويمكن تلخيص البيانات السابقة في الجدول التالي:

متغيرات القرار / الموارد	$س_{١}$	$س_{٢}$	$س_{٣}$	$س_{٤}$	الكميات المتاحة من الموارد
طاقة التقطيع	٧	٦	٩	٨	١٩٠٠
طاقة التشطيب	٥	٨	٧	٦	١٤٠٠

ويتطلب الأمر صياغة قيد لكل مورد من الموارد، فإذا ما أخذنا المورد الأول، والذي يمثل طاقة التقطيع، فإننا نلاحظ أن الوحدة من المنتج الأول ($س_{١}$) تحتاج إلى ٧ ساعات، ولذلك فإن المنتج الأول يحتاج إلى ٧ $س_{١}$ من طاقة التقطيع، أما المنتج الثاني فيحتاج إلى ٦ $س_{٢}$، والمنتج الثالث يحتاج إلى ٩ $س_{٣}$، بينما يحتاج المنتج الرابع إلى ٨ $س_{٤}$. وبالتالي فإن إجمالي الساعات التي يمكن تخصيصها من طاقة التقطيع لكل المنتجات = ٧$س_{١}$ + ٦$س_{٢}$ + ٩$س_{٣}$ + ٨ $س_{٤}$ ويجب أن يكون هذا الإجمالي في حدود طاقة التقطيع أي في حدود ١٩٠٠ ساعة أسبوعياً، حيث يمكن التعبير عن ذلك في صورة المتباينة الآتية:

٧$س_{١}$ + ٦$س_{٢}$ + ٩$س_{٣}$ + ٨$س_{٤}$ ≥ ١٩٠٠

أما بالنسبة للمورد الثاني فإنه يمكن التعبير عنه رياضياً على نفس المنوال السابق، حيث يصبح هذا القيد في صورة المتباينة الآتية:

٥$س_{١}$ + ٨$س_{٢}$ + ٧$س_{٣}$ + ٦$س_{٤}$ ≥ ١٤٠٠

وإذا أضفنا شرط عدم السالبية، فإن الصياغة الكاملة للنموذج تأخذ الشكل التالي:

<u>المطلوب تعظيم الدالة التالية:</u>

ر= ٧$س_{١}$ + ٦$س_{٢}$ + ٨$س_{٣}$ + ١٦$س_{٤}$

<u>وذلك في ظل القيود الآتية:</u>

٧$س_{١}$ + ٦$س_{٢}$ + ٩$س_{٣}$ + ٨$س_{٤}$ ≥ ١٩٠٠

٥$س_{١}$ + ٨$س_{٢}$+ ٧$س_{٣}$ + ٦$س_{٤}$ ≥ ١٤٠٠

$س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٣}$ ، $س_{٤}$ ≤ صفر

ويمكن بحل النموذج السابق، إيجاد قيم متغيرات القرار $س_1$، $س_2$، $س_3$، $س_4$ ، والتي تؤدي إلى الوصول إلى أقصى قيمة ممكنة لدالة الهدف. وقد يتضمن الحل الأمثل الاستغلال الكامل للطاقة المتاحة، كما قد يتضمن أيضاً عدم استغلال جزء من هذه الطاقة؛ ولذلك فإننا يجب أن نراعي إمكانية أن يتضمن النموذج السابق متغيرات جديدة، تأخذ في الحل الأمثل قيمة تعبر عن الطاقة غير المستغلة (إن وجدت). ويُطلق علي هذه المتغيرات الجديدة: "المتغيرات الراكدة"، وتأخذ في الحل قيمة تساوي أو أكبر من الصفر، حيث لا يتصور أن تأخذ قيمة سالبة.

وإذا رمزنا للساعات غير المستغلة في مرحلة التجميع بالرمز ($غ_1$) وللساعات غير المستغلة في مرحلة التشطيب بالرمز ($غ_2$)، فإننا يمكننا إعادة صياغة النموذج السابق، على النحو الآتي:

<u>المطلوب - تعظيم الدالة التالية:</u>

$$ر = ٧س_1 + ٦س_2 + ٨ س_3 + ١٦س_4 + صفر غ_1 + صفر غ_2$$

<u>في ظل القيود التالية:</u>

$$٧س_1 + ٦س_2 + ٩س_3 + ٨س_4 + غ_1 = ١٩٠٠$$

$$٥س_1 + ٨س_2 + ٧س_3 + ٦س_4 + غ_2 = ١٤٠٠$$

$$س_1، س_2، س_3، س_4، غ_1، غ_2 \geq صفر$$

<u>هذا، ويجب مراعاة الملاحظات الآتية على النموذج السابق:</u>

١) تمثل س١، س٢، س٣، س٤ متغيرات القرار، أما غ١، غ٢ فتمثل الساعات غير المستغلة، وهي تقابل الطاقة والموارد غير المستغلة.

٢) الدالة المبينة في بداية النموذج، تمثل دالة الهدف، وهي تعبر عن إجمالي هامش المساهمة لمستويات النشاط $س_1$، $س_2$، $س_3$، $س_4$

٣) المعادلتان المبينتان عقب دالة الهدف، تمثلان قيود المشكلة بعد تحويلهما من متباينات إلى معادلات بإضافة المتغيرات الراكدة؛ أما المتباينة الأخيرة فتمثل شرط عدم السالبية.

٤) الطاقة المتاحة في مرحلتي التقطيع والتشطيب، تمثل الموارد المتاحة، ويطلق علي الكميات المتاحة منها: قيم الطرف الأيسر للمعادلات أو المتباينات.

٥) أي قيم تأخذها المتغيرات س$_{١}$، س$_{٢}$، س$_{٣}$، س$_{٤}$، غ$_{١}$، غ$_{٢}$: تمثل حلاً للمشكلة؛ فإذا كان هذا الحل يفي بقيود المشكلة: يطلق عليه حينئذٍ حل ممكن، أما إذا كان هذا الحل يحقق أقصى قيمة لدالة الهدف أيضاً، فإنه يعتبر الحل الأمثل.

- **مثال ٢. تشكيلة المنتجات المثلى:**

تنتج إحدى المنشآت أربع منتجات، حيث يتم الإنتاج في ثلاثة مراكز للإنتاج، وفيما يلي الساعات اللازمة لإنتاج كل وحدة من المنتجات في مراكز الإنتاج، واحتياجات الوحدة من المواد الخام، وكذلك هامش مساهمة الوحدة:

المنتجات / بيانات المنتجات	المنتج الأول	المنتج الثاني	المنتج الثالث	المنتج الرابع	
مركز الإنتاج الأول	٦٥	١٠٤	---	---	ساعة
مركز الإنتاج الثاني	٢٦	---	---	٥٢	ساعة
مركز الإنتاج الثالث	١٣	---	١٥٦	٣٩	ساعة
مادة خام ط	٥٢	---	٩١	---	كيلو جرام
مادة خام ق	---	٦٥	---	١١٧	ميللي لتر
هامش المساهمة	١٠٤	٧٨	٥٢	٦٥	جنيهاً

هذا وتبلغ الطاقة المتاحة في مراكز الإنتاج والكميات المتاحة من المواد الخام ما يلي:

مركز الإنتاج الأول ٦٥٠,٠٠٠ ساعة
مركز الإنتاج الثاني ٥٢٠,٠٠٠ ساعة
مركز الإنتاج الثالث ٧٨٠,٠٠٠ ساعة
المادة الخام ط ١٩٥,٠٠٠ كيلو جرام
المادة الخام ق ١٣٠,٠٠٠ مل ليتر

وقد أسفرت دراسات السوق، عن أن أقصى كمية يمكن أن يستوعبها السوق من المنتج الأول هي ٦٥٠٠ وحدة، بينما يمكن استيعاب أي كميات من باقي المنتجات.

والمطلوب: صياغة نموذج البرمجة الخطية لهذه المنشأة، لتحديد تشكيلة المنتجات المثلى التي تحقق لها أقصي ربح ممكن.

✓ **يلاحظ هنا أننا يمكننا صياغة النموذج على النحو الآتي:**

١ - دراسة المشكلة: تمثل هذه الحالة أيضاً إحدى مشاكل تحديد تشكيلة المنتجات المثلى؛ ويهدف نموذج البرمجة الخطية إلى تحديد تشكيلة المنتجات المثلى التي تحقق للمنشأة أقصى ربح ممكن، في حدود الطاقات والموارد المتاحة.

٢ - متغيرات القرار: حيث تتمثل متغيرات القرار هنا في: المنتجات التي يمكن للمنشأة إنتاجها، وسنستخدم الرموز $س_١$، $س_٢$، $س_٣$، $س_٤$ ، للتعبير عن كميات الإنتاج من المنتجات الأربعة علي التوالي.

٣ - صياغة دالة الهدف: حيث تتمثل معاملات متغيرات القرار في دالة الهدف هنا، في هامش مساهمة الوحدة؛ وعلي ذلك يمكن صياغة دالة الهدف على النحو التالي:

المطلوب تعظيم الدالة التالية:

$$ر = ١٠٤\ س_١ + ٧٨\ س_٢ + ٥٢\ س_٣ + ٦٥ س_٤$$

٤- صياغة القيود:

يمكن تلخيص معاملات متغيرات القرار في القيود وكذلك الكميات المتاحة من الموارد في الجدول التالي:

متغيرات القرار / الموارد	$س_١$	$س_٢$	$س_٣$	$س_٤$	الكميات المتاحة من الموارد
مركز الإنتاج الأول	٦٥	١٠٤	---	---	٦٥٠,٠٠٠
مركز الإنتاج الثاني	٢٦	---	---	٥٢	٥٢٠,٠٠٠
مركز الإنتاج الثالث	١٣	---	١٥٦	٣٩	٧٨٠,٠٠٠
مادة خام ط	٥٢	---	٩١	---	١٩٥,٠٠٠
مادة خام ق	---	٦٥	---	١١٧	١٣٠,٠٠٠

وبناءً على ذلك، فإننا يمكننا صياغة القيود على النحو الآتي:

مركز الإنتاج الأول:

٦٥ س$_{١}$+ ١٠٤ س$_{٢}$ ≥ ٦٥٠,٠٠٠

مركز الإنتاج الثاني:

٢٦ س١ + ٥٢ س$_{٤}$ ≥ ٥٢٠,٠٠٠

مركز الإنتاج الثالث:

١٣ س$_{١}$ + ١٥٦س $_{٣}$ + ٣٩ س$_{٤}$ ≥ ٧٨٠,٠٠٠

المادة الخام ط:

٥٢ س$_{١}$ + ٩١ س$_{٣}$ ≥ ١٩٥,٠٠٠

المادة الخام ق:

٦٥ س$_{٢}$ + ١١٧س$_{٤}$ ≥ ١٣٠,٠٠٠

أما فيما يتعلق بأقصى كمية يمكن أن يستوعبها السوق بالنسبة للمنتج الأول، فإنه يمكن صياغة هذا القيد على النحو الآتي:

س$_{١}$ ≥ ٦٥٠٠

وعلي ذلك يمكن صياغة النموذج كلملاً على النحو الآتي:

<u>المطلوب تعظيم الدالة التالية:</u>

ر= ١٠٤ س$_{١}$ + ٧٨ س$_{٢}$ + ٥٢ س$_{٣}$+ ٦٥ س$_{٤}$

<u>وذلك في ظل القيود التالية:</u>

٦٥ س$_{١}$ + ١٠٤ س$_{٢}$ ≥ ٦٥٠,٠٠٠

٢٦ س$_{١}$ + ٥٢ س$_{٤}$ ≥ ٥٢٠,٠٠٠

١٣س$_{١}$ + ١٥٦س$_{٣}$ + ٣٩ س$_{٤}$ ≥ ٧٨٠,٠٠٠

٥٢ س$_{١}$ + ٩١ س$_{٣}$ ≥ ١٩٥,٠٠٠

٦٥ س$_{٢}$ + ١١٧ س$_{٤}$ ≥ ١٣٠,٠٠٠

س$_{١}$ ≥ ٦٥٠٠

س$_{١}$، س$_{٢}$، س$_{٣}$، س$_{٤}$ ≤ صفر .

الفصل الثالث

الطريقة البيانية لحل نموذج البرمجة الخطية

يلاحظ أن هناك أربعة اتجاهات أساسية، تمثل الأساليب المختلفة لحل مشاكل البرمجة الخطية، وهي: الطريقة البيانية؛ طريقة السمبلكس، والتي تقوم أساساً على الطريقة الجبرية (رياضة المصفوفات)، وتعتبر الطريقة العامة لحل معظم *مشاكل* البرمجة الخطية؛ طريقة النقل؛ وطريقة التعيين.

هذا، وعلى الرغم من أن الطريقة البيانية تعتبر ذات فائدة محدودة، في حل المشاكل العملية التي تتميز بكثرة وتعدد المتغيرات، ويقتصر تطبيقها في نموذج مكوناً منمتغيرين فقط، يمكن تمثيلهما بيانياً برسم محورين أو إحداثيين، ويصعب استخدامها في حل المشاكل ذات المتغيرات المتعددة، والتي تستلزم أبعاداً بيانيةً متعددةً، تحتاج إلى نظريات هندسية خاصة، إلا أن تقديم الأسلوب البياني يعد خطوةً أولى في إيضاح بعض المفاهيم الأساسية، التي تستخدم في حل مشاكل البرمجة الخطية الأكبر حجماً، فضلاً عن أن الطريقة البيانية تتسم ببساطة التطبيق.

أما الطريقة العامة لحل نموذج البرمجة الخطية (طريقة السمبلكس أو الطريقة الجبرية) فتصلح للاستخدام أياً كان عدد المتغيرات التي يتضمنها النموذج. وقد ساعد على انتشار استخدام هذه الطريقة برامج الحاسب الآلي الجاهزة التي يمكن من خلالها حل أي مشكلة برمجة خطية أياً كان عدد متغيرات القرار.

- **<u>إجراءات تطبيق الطريقة البيانية:</u>**

<u>تتضمن الطريقة البيانية لحل مشاكل البرمجة الخطية الخطوات الآتية:</u>

١- تصوير المعادلات والمتباينات التي يتضمنها النموذج بيانياً.

٢- تصوير دالة الهدف بيانياً، وإيجاد الحل الأمثل للمشكلة.

حيث تقوم الطريقة البيانية على إجراء منطقي منظم، لتحديد وتعيين موقع على الرسم أو الخريطة البيانية، يتعلق بالآتي:

١) كل القيود المختلفة في المشكلة.

٢) دالة الهدف أو المعيار المرغوب تحقيقه؛ حيث يسمح تحديد موقع هذه العناصر، في تحديد الحل الأمثل والتوصل إليه من الرسم البياني، وتتحدد إجراءات تطبيقها طبقاً للخطوات التالية:

١- تحديد وتكوين هيكل المشكلة:

أ - تحديد كل القيود: التي تمثل مدى توافر الموارد (أي المعروض منها)، والاحتياجات اللازمة من هذه الموارد (أي الطلب عليها).

ب- تعين موقع القيود الخطية: عن طريق تحديد نقطتين لكل قيد (أجزاء الخط المستقيم المحصورة بين المحورين السيني، والصادي، هي النقط الملائمة لتحديد موقع القيود).

ج- تعيين المساحة أو المنطقة الممكنة للحل: وهي تمثل الإمكانية الفنية، كما تحددها مجموعة القيود مجتمعة.

د- تحديد الخط الملائم لدالة الهدف: والذي قد يتمثل إما في تعظيم الأرباح، أو في تخفيض التكاليف.

٢- تحديد الحل الأمثل أو الحلول المثلي:

أ - تحديد موقع دالة الهدف.

ب- رسم خط مستقيم متوازي لدالة الهدف، داخل المساحة الممكنة للحل أو علي حدودها، وهو إما أن يكون:

١. أكثر بعداً عن نقطة الأصل: وذلك عندما تكون دالة الهدف تتمثل في تعظيم الأرباح.

٢. أكثر قرباً من نقطة الأصل: وذلك عندما تكون دالة الهدف تتمثل في تخفيض التكاليف.

(ج) رسم إسقاطين أفقي ورأسي من النقطة التي تحددت في ٢ ب (١) أو ٢ (ب) ٢.

(د) قراءة الحل على المحورين: السيني، والصادي، وهي تلك القيم التي تتحدد من الإسقاطين الرأسي والأفقي على المحورين السيني، والصادي، على الترتيب.

• مثال:

المطلوب حل مشكلة المزيج الإنتاجي الأمثل، باستخدام الأسلوب البياني، وذلك للمشكلة الآتية، والتي تتكون من العناصر الآتية:

١- تحديد حجم الإنتاج الأمثل الأسبوعي من المنتجات س، ص، أي تحديد كل القيم الممكنة غير السالبة للمتغيرات، والتي تحقق كل القيود الموضوعة وتحقق تعظيم الأرباح.

٢- هناك ثلاثة موارد لازمة لإنتاج هذه المنتجات، وهي الأقسام الإنتاجية: أ، ب، ج، وتبلغ الطاقة المتاحة من هذه الموارد أسبوعياً:

القسم الإنتاجي أ ≥ ١٦٠ ساعة.

القسم الإنتاجي ب ≥ ١٢٠ ساعة.

القسم الإنتاجي جـ ≥ ٢٨٠ ساعة.

٣- تحتاج الوحدة المنتجة من كل منتج من المنتجات س، ص إلى الموارد الآتية (بالساعات):

	الموارد اللازمة		
المنتجات	القسم أ	القسم ب	القسم جـ
س	٢	١	٤
ص	٢	٢	٢

حيث يمكن التعبير عن القيود (أو الاحتياجات المتاحة) جبرياً كالآتي:

٢س + ٢ص ≤ ١٦٠ ساعة في القسم الإنتاجي أ

١ س + ٢ص ≤ ١٢٠ ساعة في القسم الإنتاجي ب

٤ س + ٢ص ≤ ٢٨٠ ساعة في القسم الإنتاجي جـ

<u>تمثيل المتباينات بيانياً:</u>

يمكن تمثيل مجموعة المتباينات السابقة بيانياً، حيث يستلزم ذلك تحويل المتباينات إلي معادلات:

فبالنسبة للمتباينة الخاصة بالقسم الإنتاجي (أ) يتم الآتي:

٢س + ٢ص = ١٦٠

ولتحديد موقع كل قيد من القيود الخطية، وتحديد نقطتين لكل قيد، فإننا نفترض عدم إنتاج أي وحدات من المنتج ص، بمعنى أن نفترض أن ص = صفر

∴ ٢س = ١٦٠ ومنها س: ٨٠

وبفرض عدم إنتاج أية وحدات من المنتج س، بمعنى أن نفترض أن س = صفر

∴ ٢ص = ٨٠ ومنها ص = ٨٠

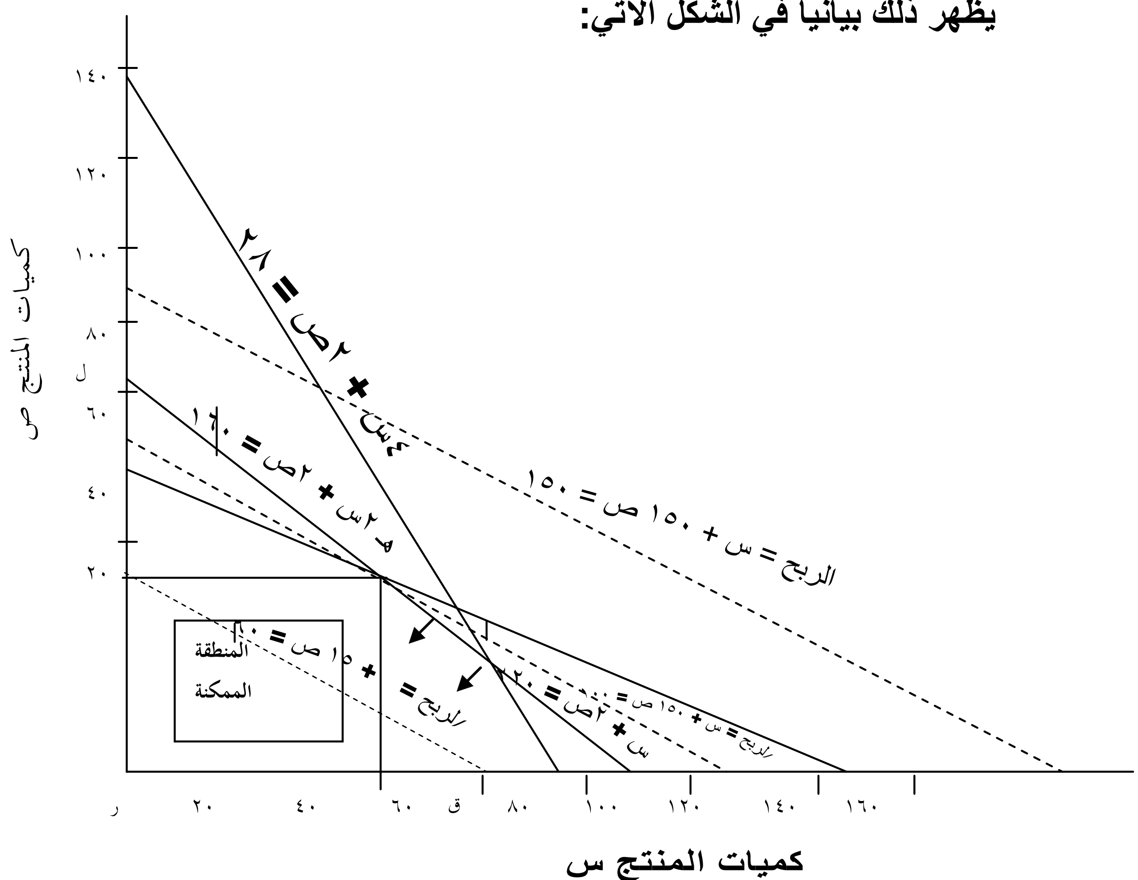
وتتمثل نقطتا القيد الأول في: (٨٠، ٨٠)

وبالنسبة للمتباينة الخاصة بالقسم الإنتاج (ب)، فإن نقطتي القيد تتمثل في: (١٢٠، ٦٠)

وبالنسبة للمتباينة الخاصة بالقسم الإنتاجي (جـ)، فإن نقطتي القيد تتمثل في: (٧٠، ١٤٠)

حيث يلاحظ أن كل قيم المتغيرات س، ص قيم موجبة، وتحقق كل القيود؛ ويطلق على هذه القيم: الحل الممكن؛ أما مجموعة كل الحلول الممكنة فيُطلق عليها: المساحة الممكنة للحل؛ ونلاحظ هنا أن حل البرنامج الخطي، ما هو إلا إيجاد أفضل حل ممكن في حدود المساحة الممكنة؛ ويطلق اصطلاح الحل الأمثل على: أفضل حل ممكن؛ ويطلق علي قيمة دالة الهدف التي تتفق مع الحل الأمثل: القيمة المثلى للبرنامج الخطي.

وتتحدد المساحة الممكنة للحل بتجميع القيود الثلاثة للموارد؛ حيث يظهر ذلك بيانياً في الشكل الآتي:



التمثيل البياني المشترك للموارد

حيث يتبين من الرسم البياني السابق، أن المنطقة المخططة هي التي تمثل المساحة المشتركة بين المتباينات، وهي تمثل منطقة الحلول الممكنة للمشكلة. وبتحديد منطقة الحلول الممكنة فإن ذلك يعتبر خطوة أولى نحو التوصل إلى حل المشكلة؛ لأن أية قيم غير سالبة للمتغيرات س، ص، والتي يمكن أن تقع داخل هذه المنطقة المشتركة التي تقع علي حدودها قيود الموارد الثلاثة، تعتبر حلولاً ممكنة؛ وتتمثل المشكلة الآن في اختيار نقطة ما، تعتبر ممكنة وتؤدي في ذات الوقت إلى تعظيم دالة الهدف، وقد يكون هناك أكثر من نقطة ما مُثلىَ، وهذا ما يطلق عليه تعدد المثالية في البرمجة الخطية (وسيتم تفصيل وتوضيح هذه الجزئية تفصيلاً ضمن الطريقة العامة أو طريقة السمبلكس).

- **<u>تمثيل دالة الهدف بيانياً:</u>**

يمكن تحديد موقع دالة الهدف بيانياً، وتحديد نقطتين لها، إذا بدأنا بقيمةٍ ما اجتهادية للدالة الخطية س = ١.٥٠٠ص، ولتكن هذه القيمة متمثلة في: تحقيق أرباح قدرها ٦٠ جنيهاً فإن نقطتي خط الربح، تتحددان على النحو الآتي:

$$س_{٦٠} = \frac{\text{٦٠ جنيهًا}}{\text{١ جنيه للوحدة من س}} = \text{٦٠ وحدة من س}$$

$$ص_{٦٠} = \frac{\text{٦٠ جنيهًا}}{\text{١.٥ جنيه للوحدة من ص}} = \text{٤٠ وحدة من ص}$$

ويظهر خط الربح – دالة الهدف – بالخطوط المتقطعة في الشكل السابق بالنقطتين (٦٠، ٤٠)؛ ولأن هذه الدالة خطية فإننا يمكننا الاستمرار في رسم عدة خطوط للربح، حيث يمثل كل خط مقداراً أكبر من الأرباح، ويظهر موازياً للخط الذي يسبقه، بسبب ثبات معدل ربح الوحدة من المنتجيْن س، ص، وتكون أكثر بعداً عن نقطة الأصل، لأن الهدف هنا هو تعظيم الأرباح. هذا،

ويتم التوقف في رسم خطوط الربح عند مماس خط الربح مع إحدى النقط التي تقع علي حدود المساحة الممكنة للحل؛ حيث يتحقق ذلك عند النقطة (هـ) في الركن الأعلى من الشكل المحدب المظلل هـ ل ر ن والذي يمثل المساحة الممكنة للحل؛ وهذا يعني أنه قد أمكننا التوصل إلي الربح الذي لا يتعدى القيود الموضوعة؛ كما أن هذه النقطة (هـ) تعتبر أكثر النقط ابتعاداً عن نقطة الأصل، حيث تمثل أقصي ربح يمكن تحقيقه في ضوء القيود الموضوعة، وهو خط ربح = ١٠٠ جنيه.

وبرسم الإسقاطين الأفقي والرأسي من النقطة هـ (كما يظهران في الرسم البياني السابق يتم التوصل إلى الحل الأمثل، حيث يتكون هذا الحل من: إنتاج ٤٠ وحدة من المنتج س، و ٤٠ وحدة من المنتج ص؛ كما أن مجموع الأرباح = س + ١,٥٠٠ ص

= ١(٤٠) + ١,٥٠٠ (٤٠) = ١٠٠ جنيهاً.

هذا، ويمكننا التأكد من أن النقطة (هـ) تمثل نقطة الحل الأمثل الوحيد، وذلك من قراءات نقط الأركان المختلفة على حدود المساحة الممكنة للحل؛ وحساب قيمة دالة الهدف – الأرباح – التي تحققها كل نقطة من هذه النقط بمزيج من المنتجين س، ص، وذلك كالآتي:

النقط علي حدود المساحة الممكنة	القيم غير السالبة للمتغيرات س، ص	دالة الربح (س+١,٥٠٠ص)	إجمالي مبلغ الأرباح بالجنيه
ر	صفر، صفر	١ (صفر)+١,٥٠٠(صفر)	صفر
ل	صفر، ٦٠	١ (صفر) + ١,٥٠٠ (٦٠)	٩٠
هـ	٤٠، ٤٠	١ (٤٠) + ١,٥٠٠ (٤٠)	[١٠٠]
ن	٧٠، صفر	١ (٧٠) + ١,٥٠٠ (صفر)	٧٠

كما يمكن التأكد من أن هذه النقطة تمثل أقصى ربح؛ وفي نفس الوقت لا تتجاوز أو تتعدى القيود الموضوعة؛ أي تمثل أقصى حل ممكن؛ وذلك عن طريق اختبارها علي القيود، وذلك كما يتبين من الآتي:

القيد (١)   ٢س + ٢ص   ≤ ١٦٠

٢ (٤٠) + ٢ (٤٠)   = ١٦٠

القيد (٢)   س + ٢ص   ≤ ١٢٠

٤٠ + ٢ (٤٠)   = ١٢٠

القيد (٣)   ٤س + ٢ص   ≤ ٢٨٠

٤ (٤٠) + ٢ (٤٠)   = ٢٤٠ ≤ ٢٨٠

وتجدر الإشارة في هذا السياق، إلى أنه قد تم التوصل إلي الحل الأمثل، عند نقطة تقاطع القيدين (١)، (٢) ومماس خط الربح مع هذه النقطة؛ أما القيد الثالث في المشكلة والذي يمثل القسم الإنتاجي جـ ، فقد اعتبر بمثابة طاقة عاطلة أو غير مستغلة.

هذا، ويمكن الوصول إلي الحل الأمثل باستخدام الطريقة البيانية بطريقة أخري وهي تحديد عائد المساهمة عند نقاط الأركان لمنطقة الحلول الممكنة، واختيار تلك النقطة التي تحقق أقصي عائد مساهمة ممكن. ويرجع الاقتصار علي نقاط الأركان عند تحديد الحل الأمثل أنه كلما اتجهنا يمينا نحو حدود منطقة الحلول الممكنة كلما ازدادت قيمة دالة الهدف، وبالتالي فإن نقاط الأركان في منطقة الحلول الممكنة ستتضمن النقطة التي تحقق أقصي قيمة لدالة الهدف.

ولا يختلف تطبيق الطريقة البيانية في حل مشاكل البرمجة الخطية التي تهدف إلي خفض التكاليف، عنها في مشاكل تعظيم الأرباح، من حيث تمثيل المتباينات بيانياً ورسم خط التكاليف بحيث يقع داخل المساحة الممكنة للحل أو علي حدودها؛ ويتمثل الاختلاف فقط في مجرد أن خط التكاليف يتحرك بشكل موازي للخط الذي يسبقه ولكن بالاقتراب من نقطة الأصل، حتى يتم التوصل إلى أكثر النقط اقتراباً من الأصل، وهي تتمثل نقطة أدني تكلفة ممكنة.

هذا، ويمكن القول عموماً: بأنه في أية مشكلة بيانية من بين مشاكل البرمجة الخطية، التي تتميز بدالة الهدف الخطية والقيود الخطية، أن الحل الأمثل عادةً ما يكون نقطة ما – علي الأقل – في أحد الأركان على حدود مساحة للحل؛ ويتحدد الموقع الدقيق لهذه النقطة عن طريق ميل دالة الهدف الذي يكون مماساً لنقطة تقاطع قيدين أو أكثر؛ كما يلاحظ أن معامل الربح (أو التكلفة) – أي معدل ربح الوحدة أو معدل التكلفة، يحدد ميل دالة الهدف؛ كما أن معاملات القيود – أي احتياجات الوحدة من الموارد – والطاقة المتاحة في كل مورد، تحدد حدود أو أركان المساحة الممكنة للحل، وبالتالي فإن أي تغيير في معاملات دالة الهدف – للربح أو التكلفة – يغير ميل دالة الهدف، كما أن أي تغيير في معاملات القيود أو الطاقة المتاحة، يعمل على تغيير أركان المساحة الممكنة للحل، وأي تغييرات جوهرية في كل أو بعض هذه العناصر، من شأنه أنه سيؤثر علي الحل الأمثل؛ وهذا هو ما يطلق عليه "تحليل حساسية نموذج البرمجة الخطية" الذي سوف نتناول دراسته بالتفصيل في ختام موضوعات هذا المرجع.

- **حدود استخدام الطريقة البيانية:**

يتبين مما سبق أن استخراج الحل الأمثل بيانياً لمشكلةٍ ما من مشاكل البرمجة الخطية، قد اعتمد أساساً علي تحديد موقع القيود المختلفة، وتحديد المساحة الممكنة للحل من واقع هذه القيود، كما اعتمد أيضاً علي تحديد موقع

وميل دالة الربح؛ ومن ثم فإن عدم دقة تحديد هذه المواقع، من شأنه أنه سيؤدي إلي نتائج أو حلول غير دقيقة؛ وذلك بالإضافة إلى أننا نجد أن الطريقة البيانية قد ارتبطت أساساً بمشاكل البرمجة الخطية ذات المتغيرين فقط؛ حيث يمكن تمثيلهما بيانياً بالمحورين السيني، والصادي؛ غير أنه إذا تضمنت المشكلة ثلاثة متغيرات: فإنه يمكن تمثيلها بيانياً عن طريق ثلاثة إحداثيات أو ثلاثة محاور س، ص، ع مثلاً، للوصول إلي ما يطلق عليه الفراغ الثلاثي، إلا أنه في المشاكل التي تتضمن أكثر من ثلاثة متغيرات وتحتاج إلي أكثر من ثلاثة أبعاد، فإنه يصعب رسم المشكلة بيانياً، لأنه في هذه الحالة يكون هناك حاجة إلى استخدام نظريات هندسية خاصة؛ ومن هنا فإن الطريقة البيانية تعتبر ذات فائدة محدودة، في حل مشاكل البرمجة الخطية العملية التي تتميز بتعدد المتغيرات، ويفضل عليها الطريقة العامة الجبرية أو ما تسمى بطريقة السمبلكس، والتي تعتمد أساساً علي جبر المصفوفات، وتمثل الطريقة العامة لحل معظم مشاكل البرمجة الخطية.

الفصل الرابع
الطريقة العامة لحل نموذج البرمجة الخطية
(طريقة السمبلكس Simplex Method)
حالة تعظيم الربحية

سبقت الإشارة إلى أن استخدام الطريقة البيانية لحل مشاكل البرمجة الخطية، يقتصرعلى تلك الحالات التي لا يزيد فيها عدد متغيرات القرار عن متغيرين؛ ونظراً لأن مشاكل الواقع العملي لا تتضمن مجرد عشرات المتغيرات للقرار الواحد، وإنما قد يصل عدد متغيرات القرار إلى المئات أو الآلاف، فإن ذلك يتطلب حتمية وجود طريقة عامة لحل مشاكل البرمجة الخطية؛ حيث يمكن القول بأن طريقة السمبلكس، تمثل الطريقة العامة لحل مشاكل البرمجة الخطية؛ والتي تعتبر بمثابة إجراء متكرر لحل مشاكل البرمجة الخطية، وذلك من خلال إيجاد عدة حلول ممكنة، يتم تحسينها، إلى أن يتم التوصل إلى الحل الأمثل، حيث تستخدم مفاهيم جبر المصفوفات، في تحديد قيم مجموعة متغيرات تشكل نظاماً من المتباينات الخطية.

وقد انتشر استخدام طريقة السمبلكس أو الطريقة العامة لحل مشاكل البرمجة الخطية وتطبيقها، في حل الكثير من المشاكل الإدارية في منشآت الأعمال، في مختلف القطاعات الاقتصادية، وكذلك في المجالات الحكومية المختلفة، حيث يرجع ذلك إلى ما تتميز به هذه الطريقة، من سمات أساسية، لعل من أهمها:

١- أنها تعتبر إجراءً عاماً بصورة تامة، بمعنى أنها قادرة علي حل أي نوع من مشاكل البرمجة الخطية، بما فيها من مشاكل النقل والتعيين التي لها طرق خاصة لحلها.

٢- أنها ليست مقيدة أو محددة بمجرد إثنين فقط من المتغيرات، كما هو الحال في الطريقة البيانية، حيث أنها تعالج أي عدد من المتغيرات والقيود.

٣- أنها تختبر وتقيم فقط المثالية المتوقعة.

٤- أنها تحدد الحلول المثلى، وتكشف عن كيفية تحسين الحلول المثلى الفرعية، بالإضافة إلى تحديد مدى مساهمة كل تحسين في زيادة الإرباح.

٥- تحقق الوصول إلى الحل الأمثل.

٦- تحدد الحلول المثلى البديلة في حالة وجودها.

✓ **خطوات تطبيق طريقة السمبلكس:**

يلاحظ أن الطريقة العامة أو طريقة السمبلكس، إنما تمثل الحل الجبري لمشكلة البرمجة الخطية، وتكمن حقيقة هذه الطريقة، في أنها عبارة عن أسلوب تتابعي أو تكراري، يتم من خلال تطبيقه، الوصول إلى الحل الأمثل للمشكلة موضوع الدراسة،، من خلال عدة خطوات متتالية، بمعنى أنه يتم تكرار نفس الخطوات إلى أن يتم التوصل إلى الحل الأمثل؛ حيث ينتج عن ذلك مجموعة من الحلول المتتالية، ومن أهم سمات طريقة السمبلكس، أن الحل الأخير دائماً ما يكون أفضل من الحل السابق عليه، وهذا ما يضمن الوصول إلى الحل الأمثل في نهاية تطبيقها؛ وتتمثل الخطوات العامة لتطبيق طريقة السمبلكس في التالي:

١- صياغة النموذج عن طريق: تحديد دالة الهدف؛ والقيود المفروضة؛ وشرط عدم السلبية.

٢- الابتداء بأول حل مبدئي ممكن: طبقاً لمجموعة من القواعد تتمثل فى:

أ- تحويل المتباينات في المشكلة إلى معادلات: بإضافة متغيرات جديدة، يطلق عليها المتغيرات الراكدة.

ب- يحتوى البرنامج المبدئي على المتغيرات الراكدة فقط: أى أن يتم البدء في الحل بنقطة الصفر، وبفرض أساسي محتواه أن المتغيرات الأصلية تساوي الصفر.

٣- تحسين الحل المبدئي بقدر الإمكان في ضوء اختبار مثالية هذا الحل المبدئي، وإيجاد حل أساسي ممكن آخر مع قيمة أفضل لدالة الهدف.

٤- الاستمرار فى إيجاد حلول أساسية ممكنة أفضل: يؤدي إلى تحسين دالة الهدف - واختبار مثالية هذه الحلول فى كل مرة؛ وعندما لا يكون هناك أي تحسين أكثر من ذلك لحل أساسي ممكن، فإن هذا الحل يمثل الحل الأمثل، وينتهي بذلك تطبيق خطوات طريقة السمبلكس.

✓ **هذا، ويمكن أن نتفهم كيفية تطبيق طريقة السمبلكس، من خلال المثال التالي:**

مثال (١): تنتج إحدى المنشآت الصناعية منتجين أ، ب؛ ويبين الجدول التالي: عائد مساهمة الوحدة، والوقت اللازم لإنتاج كل وحدة، والطاقة المتاحة بكل مرحلة إنتاجية:

	المنتج (أ)	المنتج (ب)	الطاقة المتاحة لكل مرحلة
المرحلة الأولى	٥ ساعات	١٠ ساعات	٤٠.٠٠٠ ساعة
المرحلة الثانية	١٥ ساعة	١٠ ساعات	٤٥.٠٠٠ ساعة
عائد مساهمة الوحدة	١٢.٥ ج	١٠ ج	

✓ **والمطلوب: تحديد تشكيلة المنتجات المثلى، بهدف تعظيم الربح.**

✓ **يتم البدء هنا بافتراض أن:**

$س_1$ تمثل عدد الوحدات من المنتج (أ)

$س_2$ تمثل عدد الوحدات من المنتج (ب)

✓ **فإنه يمكن صياغة نموذج البرمجة الخطية للمشكلة السابقة على النحو التالي:**

- **المطلوب تعظيم الدالة التالية:**

$$ر = ١٢,٥ \ س_1 + ١٠ \ س_2$$

- **في ظل القيود التالية:**

$$٥س_1 + ١٠س_2 \leq ٤٠.٠٠٠$$

$$١٥ \ س_1 + ١٠ \ س_2 \leq ٤٥.٠٠٠$$

$$س_1، س_2 \geq صفر$$

- **ويجب إضافة الأنشطة الخاصة بعدم استخدام الموارد أو بمعني آخر يجب تحويل المتباينات إلي معادلات بإضافة المتغيرات الراكدة، ويمكن استخدام المتغيرات الراكدة التالية:**

$غ_1$ الساعات غير المستغلة في قسم (١)

$غ_2$ الساعات غير المستغلة في قسم (٢)

ويصبح النموذج بعد إضافة المتغيرات الراكدة على النحو التالي:

- **المطلوب تعظيم الدالة التالية:**

ر= ١٢,٥ س$_1$ + ١٠ س$_2$ + صفر غ$_1$ + صفر غ$_2$

- **في ظل القيود التالية:**

٥س$_1$ + ١٠ س$_2$ + غ$_1$ + صفر غ$_2$ = ٤٠.٠٠٠

١٥ س$_1$ + ١٠ س$_2$ + صفر غ$_1$ + غ$_2$ = ٤٥.٠٠٠

- **بشرط أن: س$_1$، س$_2$، غ$_1$، غ$_2$ ≤ صفر**

ويلاحظ أن المتغيرات الراكدة ترتبط بمعاملات صفرية في دالة الهدف، حيث أن المنشأة لن تحقق أية أرباح إذا لم تستخدم الطاقة أو الموارد المتاحة لها.

ولتسهيل عملية الحل وفقا لطريقة السمبلكس، فإننا يمكننا استخدام الجدول التالي:

رو عائد المساهمة	معاملات دالة الهدف لجميع المتغيرات					
	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	المتغيرات س$_1$	الأصلية س$_2$	المتغيرات غ$_1$	الراكدة غ$_2$
معاملات دالة هدف المتغيرات الأساسية فقط		قيم الطرف الأيسر من القيود				
اختبار المثالية ص و						
صف التقييم النهائي رو- ص و						

<u>ويمكن توضيح خطوات الحل باستخدام طريقة السمبلكس، على النحو التالي:</u>

- **<u>تحديد الحل المبدئى:</u>**

تبدأ طريقة السمبلكس بحل مبدئي يتكون من المتغيرات الراكدة (غ$_1$، غ$_2$)، وطبقا لهذا الحل يفترض عدم إنتاج أية وحدات من المنتجات، وبالتالي فإن قيم المتغيرات الراكدة تساوي قيم الطرف الأيسر للمعادلات أو كميات الموارد المتاحة، ويتم إعداد جدول السمبلكس الأول على أساس هذا الحل المبدئى، ويظهر هذا الجدول على النحو التالي:

$ر_و$			١٢,٥	١٠	صفر	صفر
$ر_و$	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	س١	س٢	غ١	غ٢
صفر	غ١	٤٠.٠٠٠	٥	١٠	١	صفر
صفر	غ٢	٤٥.٠٠٠	(١٥)	١٠	صفر	١
اختبار المثالية ص و		صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
ر و- ص و			١٢,٥	١٠	صفر	صفر

ويلاحظ على الجدول السابق ما يلي:

١- يشير صف $ر_و$: **إلى معاملات المتغيرات في دالة الهدف (عائد مساهمة الوحدة)، حيث يلاحظ أن المتغيرات الراكدة ترتبط بمعاملات = الصفر في دالة الهدف؛ حيث تحقق المنشأة الربح نتيجة استخدام الموارد المتاحة لها، فإذا لم تستخدم الموارد، فإن نتيجة أعمالها تصبح صفراً.**

٢- يبين الصف الثاني: **متغيرات المشكلة؛ سواءً كانت متغيرات قرار، أو متغيرات راكدة.**

٣- يمثل عمود $ر_و$: **عائد مساهمة الوحدة للمتغيرات الأساسية للحل الذي يمثله الجدول (وهي المتغيرات التي تظهر في العمود التالي، والذي يسمى عمود متغيرات الحل). والمتغيرات الأساسية وفقا للجدول الأول هي المتغيرات الراكدة غ١، غ٢ ويلاحظ هنا أن عائد مساهمة هذه المتغيرات = صفر.**

٤- يمثل عمود متغيرات الحل: **المزيج الإنتاجي وفقا للحل الذي يمثله الجدول؛ وبناءً على هذا المزيج الإنتاجي، يتم تحديد الأرباح وفقا للحل؛ ووفقا للجدول الأول، ونظراً لعدم وجود إنتاج، فإن قيم غ١، غ٢ ستساوي كميات الموارد المتاحة، والتي تظهر في العمود الثالث، وهو عمود قيم متغيرات الحل؛ ونظراً لعدم وجود إنتاج وفقا لهذا الحل، فإن الربح المحقق = صفر (صفر × ٤٠,٠٠٠ + صفر × ٤٥,٠٠٠)، وهو الذي يظهر في العمود الثالث أمام**

صف ص$_و$ ؛ وبناء على ذلك فإن الحل وفقا للجدول الأول يتمثل فى التالى:

س$_١$ = صفر

س$_٢$ = صفر

غ$_١$ = ٤٠,٠٠٠

غ$_٢$ = ٤٥,٠٠٠

وذلك كما هو مبيناً بالأعمدة الثلاثة الأولى في الجدول الأول السابق.

٥- تبين أعمدة س$_١$، س$_٢$، غ$_١$، غ$_٢$: مصفوفة المعاملات وهي تمثل معاملات المتغيرات في القيود:

ففي عمود س$_١$: نجد أن المعاملات ٥، ١٥ في هذا العمود تمثل احتياجات المنتج الأول (س$_١$) من الساعات في القسم (١) (٥ ساعات) وفي القسم (٢) ١٥ ساعات. أما العمود س$_٢$ فتظهر به المعاملات ١٠، ١٠ وهي تمثل أيضا احتياجات المنتج الثاني (س$_٢$) من الساعات في القسم (١)، والقسم (٢) علي التوالي.

٦- تبين أعمدة المتغيرات الراكدة غ$_١$، غ$_٢$:معاملات المتغيرات الراكدة في القيود. ويلاحظ أن هذه المعاملات تشكل مصفوفة الوحدة.

٧- يستخدم الصفان الأخيران فى الجدول فى تحديد ما إذا كان من الممكن تحسين الحل أم لا؛ وبالنسبة للصف ص$_و$ فإن القيمة التى تظهر فى عمود قيم متغيرات الحل تمثل الربح (عائد المساهمة) المحقق للمنشأة وفقا لهذا الحل؛ ولذلك فإن ظهور الرقم صفر في الجدول الأول: يعني أن الربح وفقا للحل المبدئى= صفر؛ أما الرقم صفر الذي يظهر في هذا الصف تحت الأعمدة الأخرى: فإنه يمثل القيمة التي يمكن أن ينخفض بها الربح (عائد المساهمة الإجمالي)، في حالة إدخال وحدة من المتغيرات س$_١$، س$_٢$، غ$_١$، غ$_٢$ في الحل، أو بمعنى آخر، فإنها تمثل عائد المساهمة الضائع للوحدة.

٨ ــ ويمثل الصف الأخير في الجدول صف (ر$_و$ ــ ص$_و$): صافي عائد المساهمة الذي يتحقق في حالة إضافة وحدة من المتغير في الحل؛ وكما يبين الجدول الأول: فان إدخال وحدة من س$_١$ في الحل، يؤدي إلى زيادة

عائد المساهمة بـ ١٢,٥ جنيهاً، أما في حالة إدخال وحدة من س٢، فان عائد المساهمة يزيد بـ ١٠ جنيهاًت؛ أما بالنسبة للمتغيرات غ١، غ٢، فان الزيادة في عائد المساهمة في حالة إدخالهما في الحل = صفر؛ وبفحص القيم التي تظهر في هذا الصف نجد أن أكبر قيمة موجبة هي ١٢,٥، وهي تمثل الزيادة في الربح، في حالة إدخال وحدة من س١ في الحل.

ويعني وجود قيم موجبة في صف (رو – صو): إمكانية زيادة أرباح المنشأة؛ أما القيم السالبة: فتمثل القيمة التي يمكن أن تنخفض بها أرباح المنشأة، في حالة إدخال وحدة من المتغير الذي يظهر في العمود ذي القيمة السالبة في الصف الأخير من الحل؛ وعلى ذلك فإذا ظهرت قيم موجبة في الصف الأخير من الجدول: فإنها تعني إمكانية زيادة أرباح المنشأة من خلال تغيير الحل وإدخال متغيرات جديدة؛ أما في حالة ظهور قيم سالبة (أو صفر): فإنها تعني عدم إمكانية تحسين الحل؛ وبالتالي نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل.

- اختبار مثالية الحل وتحديد المتغير المرشح للدخول (تحديد العمود الرئيس):

وفقا لاختبار المثالية: فإننا نجد أن الحل وفقاً للجدول الأول، لا يمثل الحل الأمثل، وأنه يمكن تحسين الحل من خلال تغيير الحل، وإدخال متغيرات جديدة؛ حيث يمكن تغيير الحل عن طريق إدخال متغير من المتغيرات غير الأساسية، لكي يحل محل أحد المتغيرات الأساسية وفقاً للحل الحالي؛ وإذا كانت قيم صف اختبار المثالية (رو- صو) تعبر عن صافي عائد المساهمة الذي يتحقق في حالة إدخال وحدة من المتغير في الحل؛ فإنه يمكن اختيار المتغير (أو العمود) ذي أكبر قيمة موجبة في هذا الصف، ويرجع سبب اختيار العمود ذي أكبر قيمة موجبة إلى أن الهدف هنا يتمثل في تعظيم الأرباح، وبالتالي فإنه يجب اختيار المتغير الذي يحقق أكبر ربح بالنسبة للمتغيرات الأخرى؛ وفي الجدول الأول نجد أن عمود س١ (وهو يمثل المنتج الأول) ذو أكبر قيمة موجبة، حيث يحقق هذا المنتج أكبر عائد مساهمة (١٢.٥ جنيهاً للوحدة)، ولذلك فإن المتغير س١ يمثل المتغير الداخل في الحل في المرحلة التالية.

▪ **تحديد المتغير الواجب استبعاده من الحل الحالي (تحديد الصف الرئيس):**

حيث تهدف هذه الخطوة، إلى تحديد المتغير الذي سيتم استبعاده من الحل وإحلال المتغير الداخل بدلاً منه؛ وإذا كان س١ سيدخل الحل فإنه سيحل محل المتغير غ١ أو غ٢ فمن هو المتغير الذي سيتم استبعاده ؟ في الواقع فإنه يتم تحديد المتغير المستبعد، عن طريق قسمة القيم التي تظهر في عمود قيم متغيرات الحل ÷ ما يقابل كل منها من معاملات في العمود الرئيس، واختيار الصف ذي أقل قيمة موجبة.

✓ **ويرجع سبب اختيار الصف ذي أصغر قيمة موجبة: إلى أن المنشأة ترغب في إنتاج أكبر كمية ممكنة من المنتج الذي سيتم إحلاله في الحل التالي، غير إنها يجب أن تأخذ في اعتبارها، اعتبارات وحدود الطاقة المتاحة في كل قسم؛ فإذا كان المنتج الذي سيتم إحلاله في الحل التالي هو س١، فما هو عدد الوحدات التي يمكن إنتاجها من هذا المنتج ؟ في الحقيقة فإنه يمكن حساب ذلك على النحو التالي:**

$$\text{قسم ١} = \frac{\text{الساعات المتاحة}}{\text{الساعات اللازمة لإنتاج الوحدة من س١}} = \frac{٤٠,٠٠٠}{٥}$$

$$= ٨٠٠٠ \text{ وحدة}$$

$$\text{قسم ٢} = \frac{٤٥,٠٠٠}{١٥} = ٣٠٠٠ \text{ وحدة}$$

ويلاحظ أن القسم (٢) هو العامل المتحكم، لأنه يمكن إنتاج ٨,٠٠٠ وحدة وفقا لطاقة القسم (١)، إلا أن إمكانيات القسم (٢) لا تسمح إلا بإنتاج ٣,٠٠٠ وحدة فقط؛ ولذلك فإن اختيار الصف ذي أصغر قيمة موجبة يعتبر تطبيقاً لشرط عدم السالبية.

ووفقاً لذلك، فإن الصف الرئيس هنا يمثله الصف غ ٢ وبالتالي فإن المتغير الذي سيتم استبعاده من الحل هو غ٢، والعنصر الذي يقع عند تقاطع العمود الرئيس والصف الرئيس يطلق عليه عنصر المفتاح (وهو العنصر داخل الدائرة في الجدول الأول).

- **إعداد جدول السمبلكس الثاني:**

ويتم ذلك وفقا للخطوات التالية:

أ- حساب القيم الجديدة لعناصر الصف الجديد (س١) والذى سيحل محل الصف المستبعد (صف غ٢) وذلك عن طريق: القيام بقسمة جميع عناصر الصف المستبعد ÷ عنصر المفتاح (أي: بقسمة الأرقام الظاهرة في صف المفتاح ÷ رقم المفتاح؛ وتبدأ القسمة من أول رقم في عمود الكمية وحتي نهاية الجدول).

وعلي ذلك نحصل علي القيم الجديدة التالية:

$$\frac{٤٥٠٠٠}{١٥} \qquad \frac{١٥}{١٥} \qquad \frac{١٠}{١٥} \qquad \frac{صفر}{١٥} \qquad \frac{١}{١٥}$$

$$= ٣٠٠٠ \qquad ١ \qquad \frac{٢}{٣} \qquad صفر \qquad \frac{١}{١٥}$$

كما يحل معامل المتغير الداخل (س ١) في دالة الهدف وهو ١٢,٥ محل معامل المتغير المستبعد غ ٢ وهو صفر وذلك في عمود رو.

ب- حساب القيم الجديدة للصفوف الأخرى (صف غ١)، وذلك كما يتبين مما يلي:

القاعدة التي تتبع في تعديل الصفوف الأخرى، تقوم علي الأساس التالي:

الرقم الجديد= الرقم في الصف القديم – [(الرقم المناظر في صف المفتاح)×معدل ثابت]

حيث أن: المعدل الثابت = $\frac{\text{الرقم القديم فى عمود المفتاح}}{\text{رقم المفتاح}}$

وعلي ذلك فإن صف غ١ في جدول السمبلكس الثاني يشتق كالتالي مع ملاحظة أن المعدل الثابت = $\frac{5}{15}$

$$٤٠,٠٠٠ - ٤٥,٠٠٠ \times \frac{5}{15} = ٢٥,٠٠٠$$

$$٥ - \quad \times \frac{5}{15} = صفر$$

١٠ - ١٠ × $\frac{5}{15}$ = $\frac{20}{3}$

١ - صفر × $\frac{5}{15}$ = ١

صفر - ١ × $\frac{5}{15}$ = $-\frac{1}{3}$

ج – بالنسبة لصفيّ اختبار المثاليـــــة(الصفين الأخيرين بالجدول): نلاحظ أن:

١. **يتم حساب القيم الجديدة لهذين الصفين، على النحو التالي:**

صف ص و:

يتم حساب القيم الجديدة لهذا الصف، من خلال إيجاد مجموع حاصل ضرب عناصر عمود ر و [بعد تغيير عائد المساهمة المستبعد، بعائد مساهمة المتغير الداخل في الحل] × العناصر الجديدة المقابلة لها في كل عمود، وذلك على النحو التالي:

عمود قيم متغيرات الحل = (صفر× ٢٥,٠٠٠) + (١٢,٥ × ٣,٠٠٠)= ٣٧,٥٠٠

عمود س ١ = (صفر× صفر) + (١٢,٥ × ١)= ١٢,٥

عمود س ٢ = (صفر× $\frac{20}{3}$) + (١٢.٥ × $\frac{2}{3}$)= ١٢.٥

عمود غ١ = (صفر × ١) + (١٢,٥ × صفر) = صفر

عمود غ٢ = (صفر× - $\frac{١}{٣}$) + (١٢,٥ × $\frac{١}{١}$) = $\frac{٥}{٦}$

أما بالنسبة لصف (رو – صو)، فإنه يمكن حساب القيم الجديدة له على النحو التالي:

س١= ١٢,٥ (عائد المساهمة للوحدة) - ١٢,٥ (عائد المساهمة الضائع الوحدة)= صفر

س ٢ = ١٠ – $\frac{٢٥}{٣}$ = $\frac{٥}{٣}$

غ١ = صفر – صفر = صفر

غ٢ = صفر – $\frac{٥}{٦}$ = $-\frac{٥}{٦}$

ويمكن بناء على العناصر الجديدة للصفوف إعداد الجدول الثاني، ويظهر على النحو التالي:

ر و			١٢,٥	١٠	صفر	صفر
	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	س١	س٢	غ١	غ٢
صفر	غ١	٢٥٠٠٠	صفر	$\frac{٢٠}{٣}$ (مُحاط بدائرة)	١	$-\frac{١}{٣}$ ←
١٢,٥	س١	٣٠٠٠	١	$\frac{٢}{٣}$	صفر	$\frac{١}{١٥}$
اختبار المثالية ص و		٣٧٥٠٠	١٢,٥	$\frac{٢٥}{٣}$	صفر	$\frac{٥}{٦}$
ر و - ص و			صفر	$\frac{٥}{٣}$ ↑	صفر	$-\frac{٥}{٦}$

الجدول الثانى

<u>ومن جدول السمبلكس هذا؛ يمكن أن نستنبط التالى:</u>

١- يبلغ هامش المساهمة الإجمالي للمنشأة وفقا لهذا الحل ٣٧,٥٠٠ جنيهاً. (في حين أنه كان يبلغ صفراً وفقاً للحل الذي يمثله جدول السمبلكس الأول).

٢- أن هناك قيماً موجبةً ($\frac{٥}{٣}$ في عمود س٢) في الصف الأخير من الجدول، وهذا يعني إمكانية تحسين الحل.

<u>خامساً- اختبار مثالية الحل وتحسينه إذا كان ذلك ممكناً:</u>

<u>نتيجةً لظهور قيم موجبة في صف اختبار المثالية في الجدول الثاني (السابق إعداده)، فإن الحل الذي يمثله هذا الجدول يعتبر حلاً غير أمثل، ومن ثم فإن هناك إمكانية لتحسين الحل</u>، عن طريق: إدخال متغير جديد يحل محل أحد المتغيرات الأساسية، وفقا للحل الذي يمثله هذا الجدول، <u>ويتم تحسين الحل باتباع الخطوات التالية:</u>

<u>١- تحديد المتغير الداخل (العمود الرئيس):</u>

- ✓ **تعني القيم الموجبة في صف اختبار المثالية أن: هناك إمكانية لزيادة الأرباح،**

عن طريق تعديل الحل وإحلال متغير جديد محل أحد المتغيرات التي يتضمنها الحل الحالي؛ ويتم اختيار المتغير (أو العمود) ذي أكبر قيمة موجبة في صف اختبار المثالية:

وعلي ذلك فإن المتغير الجديد الذي سيدخل في الحل الجديد هو المتغير $س_٢$

٢- تحديد المتغير الذى سيتم استبعاده من الحل الحالى (الصف الرئيس):

يستلزم تحديد المتغير الذي سيتم استبعاده: ضرورة قسمة كل رقم من أرقام عمود قيم متغيرات الحل ÷ القيم المقابلة لها في العمود الرئيس، وذلك على النحو التالي:

$$\text{صف } غ_١ = ٢٥٠٠٠ \div \frac{٢٠}{٣} = ٣٧٥٠$$

$$\text{صف } س_١ = ٣٠٠٠ \div \frac{٢}{٣} = ٤٥٠٠$$

وهنا نلاحظ أن: الصف ذو أصغر قيمة موجبة هو الصف $غ_١$، وعلى ذلك، فإن الصف الرئيس هو: صف $غ_١$، وكذلك فإن المتغير المستبعد هو: $غ_١$

٣- تحديد عنصر المفتاح: وهو الرقم الذي يقع عند تقاطع الصف الرئيس مع العمود الرئيس، وهو الرقم $\frac{٢٠}{٣}$ في الجدول الثاني.

٤- يمكن تحديد قيم عناصر صف $س_٢$ الجديدة: بقسمة عناصر صف $غ_١$ القديمة علي عنصر المفتاح ($\frac{٢٠}{٣}$)، وعلى ذلك نحصل علي القيم الجديدة التالية:

$٢٥٠٠٠ \div \frac{٢٠}{٣}$	$\text{صفر} \div \frac{٢٠}{٣}$	$\frac{٢٠}{٣} \div \frac{٢٠}{٣}$	$١ \div \frac{٢٠}{٣}$	$-\frac{١}{٣} \div \frac{٢٠}{٣}$
↓ $= ٣٧٥٠$	↓ $= \text{صفر}$	↓ $= ١$	↓ $= \frac{٣}{٢٠}$	↓ $= -\frac{١}{٢٠}$

٥- حساب القيم الجديدة لعناصر الصفوف الأخرى، باستخدام المعادلة السابقة (الموضحة في صفحة ٨٧)؛ وعلى ذلك فإن قيم عناصر صف $س_١$ الجديدة تحسب على النحو التالي:

الرقم الجديد= الرقم في الصف القديم - [الرقم المناظر في صف المفتاح × معدل ثابت] =

$$\frac{\text{الرقم القديم فى عمود المفتاح } \frac{٢}{٣}}{\text{رقم المفتاح } \frac{٢٠}{٣}} = \frac{١}{١٠}$$

$$٣٠٠٠ - (٢٥٠٠٠ \times \frac{١}{١٠}) = ٥٠٠$$

$$١ - (\text{صفر} \times \frac{١}{١٠}) = ١$$

$$\frac{٢}{٣} - (\frac{٢٠}{٣} \times \frac{١}{١٠}) = \text{صفر}$$

$$\text{صفر} - (١ \times \frac{١}{١٠}) = -\frac{١}{١٠}$$

$$\frac{١}{١٥} - (-\frac{١}{٣} \times \frac{١}{١٠}) = \frac{١}{١٠}$$

٦- كما يمكن حساب العناصر الجديدة للصفين الأخيرين: بنفس الطريقة المبينة في إعداد الجدول الثاني (صفحة ٨٨)، ومن ثم فإن جدول السمبلكس الثالث، يظهركما يلي:

ر و			١٢,٥	١٠	صفر	صفر
	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	$س_١$	$س_٢$	$غ_١$	$غ_٢$
١٠	$س_٢$	٣٧٥٠	صفر	١	$\frac{٣}{٢٠}$	$-\frac{١}{٢٠}$
١٢,٥	$س_١$	٥٠٠	١	صفر	$-\frac{١}{١٠}$	$\frac{١}{١٠}$
اختبار المثالية ص ر		٤٣,٧٥٠	١٢.٥	١٠	$\frac{١}{٤}$	$\frac{٣}{٤}$
ر و - ص و			صفر	صفر	$-\frac{١}{٤}$	$-\frac{٣}{٤}$

- **<u>وهنا تجدر ملاحظة التالي:</u>**

<u>(١) الربح المحقق وفقا لهذا الحل يبلغ: ٤٣٧٥٠ جنيهاً، وهو يزيد عن</u>

الربح المحقق وفقا للحل السابق (٣٧٥٠٠ جنيهاً) بمبلغ ٦٢٥٠ جنيهاً.

(٢) لا تظهر قيم موجبة في صف ($ر_و$ - $ص_و$) ؛ وهو الأمر الذي يعني عدم إمكانية تحسين الحل؛ ومن ثم نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل والذي يتمثل في:

$س_١$ = ٥٠٠ وحدة

$س_٢$ = ٣٧٥٠ وحدة

كل من: $غ_١$، $غ_٢$ = صفر

هامش المساهمة الإجمالي (الربح) للمنشأة وفقا لهذا الحل = ٤٣٧٥٠ جنيهاً

ويعني هذا الحل: إنتاج ٥٠٠ وحدة من المنتج الأول، ٣٧٥٠ وحدة من المنتج الثاني. كما أنه لا توجد ساعات عاطلة (أو غير مستغلة) في الأقسام الإنتاجية حيث إن $غ_١$ = صفر، $غ_٢$ = صفر.

كما يمكن التأكد من أن الحل يفي بالقيود، عن طريق التعويض في القيود بقيم المتغيرات على النحو التالي:

القيود:

$$٥س_١ + ١٠ س_٢ \leq ٤٠,٠٠٠$$

$$١٥س_١ + ١٠ س_٢ \leq ٤٥,٠٠٠$$

وبالتعويض بقيم $س_١$، $س_٢$ في هذه القيود، نجد أن:

القيد الأول:

$$(٥ \times ٥٠٠) + (١٠ \times ٣,٧٥٠) \leq ٤٠,٠٠٠$$

$$٢,٥٠٠ + ٣٧,٥٠٠ \leq ٤٠,٠٠٠$$

$$٤٠,٠٠٠ = ٤٠,٠٠٠$$

وفي القيد الثاني:

$$(١٥ \times ٥٠٠) + (١٠ \times ٣,٧٥٠) \leq ٤٥,٠٠٠$$

$$٧٥٠٠ + ٣٧,٥٠٠ \leq ٤٥,٠٠٠$$

$$٤٥,٠٠٠ = ٤٥,٠٠٠$$

- **ملاحظات هامة:**

١. **يلاحظ أنه في بعض الحالات؛ قد نجد أن الحل الأمثل يتضمن ساعات غير مستغلة، بمعنى أن الحل يتضمن قيماً موجبةً للمتغيرات الراكدة، وفي مثل هذه الحالة، فإننا يجب أن نتاكد من سلامة الحل بالتعويض في القيود، حيث يجب أن يتساوى مجموع (الساعات المستغلة + الساعات غير المستغلة) مع الساعات المتاحة.**

٢. **حساب تكلفة الموارد المستخدمة في الإنتاج:**

يطلق على معاملات المتغيرات الراكدة الظاهرة فى صف التقييم النهائى: أسعار ظل الموارد (أو الأسعار المحاسبية أو الأسعار الداخلية).

- فمعامل المتغير الراكد $غ_1$ يمثل سعر ظل مورد القسم الأول (المرحلة الأولى) ويساوي $\frac{١}{٤}$ جنيهاً (مع إهمال الإشارة السالبة).

- ومعامل المتغير الراكد $غ_2$ يمثل سعر ظل مورد القسم الثانى (المرحلة الثانية) ويساوي $\frac{٣}{٤}$ جنيهاً (مع إهمال الإشارة السالبة).

[وقد يحدث أن يكون معامل أحد المتغيرات الراكدة مساوياً للصفر، وهذا يعني أن سعر الظل = صفراً: وهذا أيضا يعني أن هناك طاقة عاطلة فائضة من هذا المورد؛ وهذه الطاقة الفائضة ليس لها قيمة ولذلك فسعر الظل = صفراً].

وبناءً علي ذلك يمكننا حساب تكلفة الموارد المستخدمة في الإنتاج كما يلي:

(طاقة مورد القسم الأول × سعر الظل) + (طاقة مورد القسم الثاني × سعر الظل) = (٤٠,٠٠٠ ساعة × $\frac{١}{٤}$ جنيهاً) + (٤٥,٠٠٠ ساعة × $\frac{٣}{٤}$) = ١٠,٠٠٠ + ٣٣,٧٥٠ = ٤٣,٧٥٠جنيهاً.

ويلاحظ أن إجمالي تكلفة الموارد المستخدمة في الإنتاج = إجمالي هامش (أو عائد) المساهمة (أو إجمالي الأرباح) = ٤٣.٧٥٠ جنيهاً من جدول السمبلكس الأمثل.

٣- حساب الطاقة العاطلة للموارد:

تحسب الطاقة العاطلة (للموارد) لأي مورد، أو لأي عامل من عوامل الإنتاج كما يلي:

الطاقة العاطلة = الطاقة القصوى المتاحة (ـ) الطاقة الفعلية المستغلة

∴ أ- الطاقة العاطلة لمورد القسم الأول (المرحلة الأولى) =

= ٤٠,٠٠٠ ساعة - [٥ $س_١$ + ١٠ $س_٢$]

[٥ × ٥٠٠ + ١٠ × ٣٧٥٠]

من المعطيات — معامل $س_١$ من متباينة القسم الأول — قيمة س١ من الجدول الأمثل — معامل س٢ — قيمة س٢ من الجدول الأمثل

= ٤٠,٠٠٠ ساعة - [٢٥٠٠ + ٣٧٥٠٠]

= ٤٠,٠٠٠ ساعة ــ ٤٠,٠٠٠ ساعة = صفر

وهذا يعني أن طاقة القسم الأول مستغلة بالكامل.

ب- الطاقة العاطلة لموارد القسم الثاني (المرحلة الثانية) =

٤٥,٠٠٠ ساعة - [(١٥ × ٥٠٠) + (١٠ × ٣٧٥٠)]

من المعطيات — معامل $س_١$ — قيمة س١ — معامل س٢ — قيمة س٢

= ٤٥٠٠٠- [٧٥٠٠ + ٣٧٥٠٠] = صفر

وهذا يعني أن طاقة القسم الثاني مستغلة بالكامل.

التفسير المحاسبي والاقتصادي لمعلومات نموذج البرمجة الخطية:

مثال:

تنتج إحدى المنشآت ثلاثة منتجات أ، ب، جـ، يحقق كل منها عائد مساهمة للوحدة قدره: ٢ج، ٤ج، ٠,٥جنيهاً علي الترتيب، والتالي بياناً يوضح احتياجات الوحدة من كل منتج من كلٍ من: المواد الخام؛ وساعات الطاقة؛ والكميات المتاحة من هذه الموارد:

الموارد	احتياج وحدة المنتج من الموارد			المتاح من الموارد
	أ	ب	جـ	
مادة خام م	٤	٢	ـــ	١٠٠
مادة خام ن	٢	١	١	١٠٠
ساعات الآلات	١	٣	١	١٠٠

وقد استخدمت المشأة المذكورة نموذج البرمجة الخطية، لتحديد خليط الإنتاج الأمثل الذي يحقق أقصى ربح ممكن؛ وفيما يلي جدول السمبلكس الأمثل:

ر و			٢	٤	٠.٥	صفر	صفر	صفر
	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	س$_1$	س$_2$	س$_3$	غ$_1$	غ$_2$	غ$_3$
٢	س$_1$	١٠	١	صفر	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	صفر	$-\frac{1}{5}$
صفر	غ$_2$	٥٠	صفر	صفر	١	$-\frac{1}{2}$	١	صفر
٤	س$_2$	٣٠	صفر	١	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{10}$	صفر	$\frac{2}{5}$
اختبار المثالية ص و								
ر و – ص و								

حيث تمثل س$_١$، س$_٢$، س$_٣$ الكميات الواجب إنتاجها من كل منتج، كما تمثل غ$_١$، غ$_٢$، غ$_٣$ المتغيرات الراكدة المرتبطة بقيود المادة الخام وساعات تشغيل الآلات.

<u>أولاً: صياغة نموذج البرمجة الخطية لهذه المشكلة في صورته الأساسية.</u>

١- دالة الهدف: تعظيم ر= ٢س$_١$ + ٤س$_٢$ + $\frac{1}{2}$ س$_٣$

٢- القيود: قيد المادة الخام م: ٤س$_١$+ ٢س$_٢$ $\geq$ ١٠٠

قيد المادة الخام ن: ٢س$_١$+ ١س$_٢$+ ١س$_٣$ $\geq$ ١٠٠

قيد ساعات الآلات: ١س$_١$ + ٣س$_٢$+ ١س$_٣$ $\geq$ ١٠٠

٣- شرط عدم السالبية... س١، س٢، س٣ $\leq$ صفر

<u>دالة الهدف =</u> ٢س$_١$ + ٤س$_٢$ + ٠.٥ س$_٣$ + ٠غ$_١$ + ٠غ$_٢$ + ٠غ$_٣$

<u>تحويل متباينات القيود إلى معادلات:</u>

٤س$_١$ + ٢س$_٢$ + غ$_١$ =١٠٠

٢س$_١$ + ١س$_٢$ +١س$_٣$ +غ$_٢$ =١٠٠

١س$_١$ + ٣س$_٢$+ ١س$_٣$ +غ$_٣$ =١٠٠

- **<u>بفرض أن جميع المتغيرات الأصلية = صفر، والتعويض في معادلات القيود</u>**

$\therefore$ غ$_١$=١٠٠ ، غ$_٢$= ١٠٠ ، غ$_٣$ = ١٠٠

<u>ثانياً: استكمال بيانات جدول السمبلكس الأمثل:</u>

ر و			٢	٤	٠.٥	صفر	صفر	صفر
	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	س$_١$	س$_٢$	س$_٣$	غ$_١$	غ$_٢$	غ$_٣$
٢	س$_١$	١٠	١	صفر	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	صفر	$-\frac{1}{5}$
صفر	غ$_٢$	٥٠	صفر	صفر	١	$-\frac{1}{2}$	١	صفر
٤	س$_٢$	٣٠	صفر	١	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{10}$	صفر	$\frac{2}{5}$
اختبار المثالية ص و		١٤٠	٢	٤	$\frac{6}{5}$	$\frac{2}{10}$	صفر	$\frac{6}{5}$
ر و – ص و			صفر	صفر	$-\frac{7}{10}$	$-\frac{2}{10}$	صفر	$-\frac{6}{5}$

<u>ويتم إيجاد أرقام صف (ر) على النحو التالي:</u>

- ✓ **بالنسبة للمتغيرات الأصلية (س) ← من دالة هدف النموذج**
- ✓ **بالنسبة للمتغيرات الراكدة (غ) ← دائما معاملها = صفر.**
- ✓ **أرقام عمود (ر): هي معاملات دالة الهدف للمتغيرات الأساسية فقط، وبالتالي فإنها تتوقف علي المتغيرات الموجودة في عمود متغيرات الحل.**
- ✓ **أرقام صف (ص)، أرقام صف (ر – ص) يتم إيجادها بالقواعد المعروفة والسابق ذكرها.**

تفسير المعلومات الموضحة في جدول السمبلكس الأمثل تفسيراً اقتصادياً ومحاسبياً:

أ- تحديد كمية الإنتاج من كل منتج، وأقصى ربح ممكن:

- **لاحظ أن: كمية الإنتاج تعبر عنها المتغيرات الأصلية س: فإذا ظهر أحد المتغيرات الأصلية في عمود متغيرات الحل فإن هذا يعني أنه يجب إنتاج كمية من هذا المنتج تساوي الرقم الموجود في عمود قيم متغيرات الحل أمام المتغير الأصلى.**
- **أما إذا لم يظهر أحد المتغيرات الأصلية في عمود متغيرات الحل فإن هذا يعني أن هذا المنتج لن يتم إنتاج أية وحدات منه "أي أن كمية الإنتاج من هذا المنتج = صفر."**

وبالتطبيق علي التمرين من جدول الحل الأمثل، نتبين أن:

الكمية المنتجة من المنتج الأول $س_1$ = ١٠

الكمية المنتجة من المنتج الثاني $س_2$ = ٣٠

الكمية المنتجة من المنتج الثالث $س_3$ = صفر

- **لاحظ أن: أقصى ربح ممكن هو الرقم الموجود في صف ص أسفل عمود قيم متغيرات الحل.**

وبالتطبيق علي التمرين من جدول الحل الأمثل، نجد أن:

أقصى ربح ممكن = ١٤٠

▪درجة استغلال الموارد المتاحة
(تحديد الطاقات المستغلة والعاطلة):

- **المتغيرات الراكدة غ: هى التى تعبر عن الطاقات ومدي استغلالها. فإذا ظهر أحد المتغيرات الراكدة في عمود متغيرات الحل، فإن هذا يعني أن المورد(القيد) الذي يعبر عنه هذا المتغير الراكد، توجد به طاقة عاطلة.**
- **كمية الطاقة العاطلة = الرقم الموجود فى عمود قيم متغيرات الحل أمام المتغير الراكد.**
- **أما إذا لم يظهر أحد المتغيرات الراكدة في عمود متغيرات الحل، فإن هذا يعني أن المورد (القيد) الذي يعبر عنه هذا المتغير الراكد مُستغل بالكامل؛ أي أنه لا توجد به طاقة عاطلة (طاقته العاطلة = صفر).**

وبالتطبيق علي التمرين (من جدول الحل الأمثل)، نجد أن:

$غ_1$= صفر ←∴ المورد الأول مستغل بالكامل

$غ_2$= ٥٠ ←∴ المورد الثاني به طاقة عاطلة قدرها ٥٠

$غ_3$= صفر ←∴ المورد الثالث مستغل بالكامل

- **تحديد أسعار ظل الموارد:**

(أثر إضافة وحدة واحدة من كل مورد علي أرباح المنشأة):

يلاحظ أن: أسعار الظل هي: الأرقام الموجودة فى صف التقييم النهائى (ر-ص) أسفل أعمدة المتغيرات الراكدة بجدول الحل الأمثل للنموذج (مع إهمال الإشارة).

ويقصد بأسعار الظل: مقدار التغير فى قيمة الأرباح الإجمالية (دالة الهدف) نتيجة التغير فى كمية المورد بوحدة واحدة.

وبالتطبيق علي التمرين من جدول الحل المثل:

المورد الأول: المادة الخام م:

سعر ظل المورد الأول المادة م ←أسفل الراكد $غ_1$= $\frac{2}{10}$ جنيهاً

وهذا يعني أن عائد المساهمة الإجمالي يزيد بمقدار $\frac{2}{10}$ جنيهاً؛ إذا زادت الكمية المتاحة من المادة م بمقدار ١ كيلو، كما أن ذلك يؤدي إلى: (انظر عمود غ١):

زيادة الكمية المنتجة من س١ بمقدار $\frac{3}{10}$ وحدة

نقص كمية غ٢ ←بمقدار $\frac{1}{2}$، ونقص س٢ بمقدار $\frac{1}{10}$ وحدة

ويمكن حساب أثر هذا الإحلال علي عائد المساهمة، على النحو التالي:

زيادة كمية س١ بمقدار $\frac{3}{10}$ وحدة × ٢ جنيهاً = +٠,٦ جنيهاً

نقص كمية س٢ بمقدار $\frac{1}{10}$ وحدة × ٤ جنيهاً = ـ ٠,٤ جنيهاً

∴ النتيجة النهائية زيادة في عائد المساهمة +٠.٢ جنيهاً

<u>المورد الثانى: المادة الخام ن:</u>

سعر ظل المورد الثاني (المادة الخام ن) أسفل الراكد غ٢ = صفر وهذا يعنى: أن عائد المساهمة الإجمالي لن يتأثر إذا ذادت الكمية المتاحة من المادة الخام ن، لأنه يوجد منها كمية فائضة (طاقة عاطلة).

<u>المورد الثالث: ساعات الآلات:</u>

سعر ظل المورد الثالث: ساعات الآلات: أسفل الراكد غ٣ = $\frac{6}{5}$

*** وهذا يعني: أن عائد المساهمة الإجمالي يزيد بمقدار $\frac{6}{5}$ جنيهاً؛ إذا زادت الكمية المتاحة من ساعات تشغيل الآلات بمقدار ١ ساعة ؛ كما أن ذلك يؤدي إلي (أنظر عمود المتغير غ٣):**

نقص الكمية المنتجة من س١ بمقدار ← $\frac{1}{5}$ وحدة

زيادة الكمية المنتجة من س٢ بمقدار ← $\frac{2}{5}$ وحدة

ويمكن حساب أثر هذا الإحلال علي عائد المساهمة:

نقص كمية س١ بمقدار $\frac{1}{5}$ وحدة × ٢ جنيهاً = (-) $\frac{2}{5}$ جنيهاً

زيادة كمية س٢ بمقدار $\frac{2}{5}$ وحدة × ٤ جنيهاً = + $\frac{8}{5}$ جنيهاً

∴ النتيجة النهائية زيادة في عائد المساهمة + $\frac{6}{5}$ جنيهاً

- **المنتجات التي لا يتضمنها الحل الأمثل - والسبب في ذلك:**

يمكن حساب أو تحديد خسارة الفرصة البديلة للمنتجات التي لم تدخل في الحل الأمثل؛ وكذلك عائد المساهمة الذي يجب أن يحققه كل منتج ليس ضمن الحل الأمثل حتى يكون إدخاله في الحل مربحاً، وذلك على النحو التالي:

يلاحظ هنا أن:

المنتجات التي لا يتضمنها الحل ⟵ هو المنتج س٣

وسبب ذلك أنه: لا يتم إنتاج أية وحدات من المنتج س٣، وذلك لأن كل وحدة يتم إنتاجها من هذا المنتج يترتب عليها تحمل المنشأة خسارة فرصة بديلة قدرها $\frac{7}{10}$ جنيهاً.

- **يلاحظ أن: خسارة الفرصة البديلة تتمثل في: الأرقام الموجودة في صف التقييم النهائي (ر- ص) أسفل أعمدة المتغيرات الأصلية بجدول الحل الأمثل للنموذج (مع إهمال الإشارة).**
- **ويقصد بخسارة الفرصة البديلة: مقدار الخسارة التي تتحملها المنشأة نتيجة إنتاج وحدة واحدة من المنتج.**

- **حساب خسارة الفرصة البديلة للمنتجات التي لم تدخل الحل:**

يتم حساب خسارة الفرصة البديلة للمنتجات التي لم تدخل في الحل الأمثل كما يلى:

عائد مساهمة الوحدة من المنتج س٣ ________ ٠.٥ جنيهاً= $\frac{2.5}{5}$

يطرح منه:

قيمة الموارد المستخدمة في إنتاج وحدة واحدة من س٣

مقومة بأسعار الظل (الاحتياج من الموارد × سعر ظل الموارد)

المادة الخام م: ٠ كيلو × $\frac{2}{10}$ = صفر

المادة الخام ن: ١ كيلو × ٠ = صفر

ساعات الآلات: ١ ساعة × $\frac{6}{5}$ = $\frac{6}{5}$ (∴ الإجمالي=١.٢ جنيهاً)

∴ خسارة الفرصة البديلة للمنتج س٣ = ـ ٠.٧

عائد المساهمة الذي يجب أن تحققه الوحدة من المنتج غير الداخل في الحل؛ حتى يكون إدخاله في الحل مربحاً =

= قيمة الموارد المستخدمة في إنتاجه مقومة بأسعار الظل.

أو = هامش المساهمة الحالي له + خسارة فرصته البديلة

∴ عائد المساهمة الذي يجب أن تحققه الوحدة من المنتج س٣ حتى يكون إدخاله في الحل مربحاً =

= قيمة الموارد المستخدمة في إنتاجه مقومة بأسعار الظل= ١,٢ج

أو هامش المساهمة الحالي ٠,٥ + خسارة فرصته البديلة ٠,٧= ١,٢ج

- **إنتاج منتج جديد:**
- **إذا رغبت المنشأة في إضافة منتج جديد، تحقق الوحدة منه عائد مساهمة قدره على سبيل المثال ٦ جنيهات، ويتطلب إنتاج الوحدة منه: ٣ كيلو من المادة الخام م، و٥ كيلو من المادة الخام ن، و٦ ساعات من ساعات تشغيل الآلات. هل تنصح بإدخال هذا المنتج ولماذا؟**

من أجل تحديد هل من الأفضل قبول أو رفض إضافة منتج جديد، يجب القيام بتحديد صافي ربح أو خسارة هذا المنتج...

ويتم تحديد صافي ربح أو خسارة المنتج الجديد كما يلي:

صافي ربح أو خسارة المنتج الجديد =

هامش مساهمة الوحدة من المنتج	(-)	قيمة الموارد المستخدمة فى إنتاج وحدة من هذا المنتج مقومة بأسعار الظل

∴ هامش مساهمة الوحدة من المنتج الجديد: ٦ جنيهات

يطرح منه: قيمة الموارد المستخدمة في إنتاج وحدة واحدة من المنتج مقومة بأسعار الظل:

الاحتياج من الموارد × سعر ظل المورد

المادة م: ٣ × $\frac{2}{10}$ =٠.٦جنيهاً

المادة ن: ٥ × ٠ = صفر

ساعات الآلات: ٦ × $\frac{6}{5}$ = $\frac{36}{5}$ = ٧.٢جنيهاً

الإجمالي ٧.٨ جنيهاً

∴ خسارة فرصته البديلة = ١.٨ جنيهاً

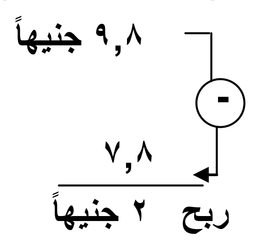
∴ لا ننصح بإضافة هذا المنتج؛ حيث أن إضافة هذا المنتج يترتب عليه تحمل المنشأة خسارة فرصة بديلة قدرها ١.٨ جنيهاً عن كل وحدة يتم إنتاجها.

- **بفرض أن هامش مساهمة الوحدة من المنتج الجديد ٩,٨ جنيهاً؛ فهل تنصح في هذه الحالة بإضافة المنتج الجديد؟**

هامش مساهمة الوحدة من المنتج الجديد ٩.٨ جنيهاً

يطرح منه:

قيمة الموارد المستخدمة في إنتاج وحدة واحدة من المنتج مقومة بأسعار الظل (كما سبق حسابها)



∴ ننصح في هذه الحالة بإضافة المنتج الجديد؛ طالما أن إضافته يترتب عليها تحقيق ربح قدره ٢ جنيهاً عن كل وحدة يتم إنتاجها.

- **بفرض أن هامش مساهمة الوحدة من المنتج الجديد ٧,٨ ج فهل ننصح في هذه الحالة بإضافة المنتج الجديد؟**

∵ هامش مساهمة الوحدة من المنتج ⟵ ٧,٨ جنيهاً

يطرح منه: –

قيمة الموارد المستخدمة فى إنتاج وحدة واحدة من المنتج مقومة بأسعار الظل كما سبق حسابها). ٧,٨

= صفر

∴ ننصح بإضافة المنتج الجديد طالما أن قيمة الموارد المستخدمة في إنتاج وحدة واحدة منه = هامش مساهمة الوحدة منه.

- **بعض مشاكل تطبيق طريقة السمبلكس:**

يحفل الواقع العملي لتطبيق طريقة السمبلكس بمواجهة بعض المشاكل: حيث قد يحدث بعض الحالات توافر عدة حلول مثلى وليس حلاً أمثلاً وحيداً؛ كما قد يحدث في حالات أخرى: أن يكون الحل الأمثل غير محدود نظراً لأن منطقة الحلول الممكنة غير مغلقة؛ كما قد يحدث حالة تعدد المتغيرات المرشحة للخروج من الحل، الأمر الذي يؤدى إلى ظهور مشكلة تسمى " مشكلة اعتلال الحل"؛ وغير ذلك من المشاكل؛ ويمكن توضيح ذلك على النحو التالي:

أولاً: حالة تعدد المتغيرات المرشحة للدخول في الحل [أي تساوي أكبر معامل موجب]:

من المعروف – في مشاكل البرمجة الخطية لتعظيم الأرباح - أن عملية اختيار متغيرٍ ما غير أساسي لكي يدخل إلى الحل كمتغير أساسي، إنما يتم عن طريق اختيار ذلك المتغير الذي يكون له أعلى معامل موجب (المتغير صاحب أعلى معامل موجب) يساهم في تحسين قيمة الأرباح؛ غير أنه قد يحدث في بعض الحالات، أن نجد أمامنا أكثر من متغير واحد له نفس أكبر قيمة موجبة في صف التقييم النهائي (صف $ر_و$ – $ص_و$)، حينئذٍ نواجه مشكلة التعادل أو التساوي عند اختيار متغير كان غير أساسي؛ والقاعدة هنا تتمثل في: اختيار أي متغير منهما اجتهادياً، حتي ولو أدى الاختيار الخاطئ إلى زيادة عدد

جداول السمبلكس؛ حيث لا تتوافر طريقة للتنبؤ بهذا الاختيار الخاطئ قبل التطبيق؛ ومن ثم فإن الاختيار الاجتهادي لأي من المتغيرين هنا، يمثل القاعدة العامة لمعالجة هذا التساوي في المعامل الموجب الأكبر.

ثانياً: حالة تساوي أصغر كمية موجبة [اعتلال الحل؛ أو تعدد المتغيرات المرشحة للخروج]:

من المعلوم أنه يتم تطبيق قاعدة أصغر كمية موجبة، لاختيار صف المتغير الخارج؛ حيث يتم اختيار المتغير المرشح للخروج؛ عن طريق قسمة عناصر عمود قيم متغيرات الحل على العناصر المقابلة فى عمود المتغير المرشح للدخول فى الحل (العمود الرئيس)؛ حيث يتم اختيار المتغير (الصف) ذى أصغر قيمة موجبة ناتجة عن عملية القسمة؛ غير أنه قد يحدث أحياناً أن نجد أن نتيجة عملية القسمة متساوية بالنسبة لأكثر من متغير (صف)؛ فإذا ما تم اختيار أحد المتغيرات للخروج من الحل، فإن قيمة المتغير أو المتغيرات الأخرى ذات نتيجة القسمة المتساوية، ستؤول إلى الصفر فى الحل التالى؛ مما يعني أن قيمة أحد المتغيرات الأساسية فى الحل تساوى صفر؛ وفى مثل هذه الحالة نجد أن الحل يفقد صفة الحل الأساسي ويُسمى "الحل المعتل".

ويلاحظ هنا عدم توافر قاعدة محددة توضح لنا مسبقاً أفضلية اختيار متغير للخروج من الحل فى حالة تساوى نتيجة القسمة؛ بل إنه قد يؤدى اختيار أحد المتغيرات بدلا من المتغير الآخر (أو المتغيرات الأخرى) إلى اختلاف عدد جداول السمبلكس اللازمة للوصول إلى الحل الأمثل، وكذلك اختلاف أسعار الظل؛ وذلك في الوقت الذي لن تتغير فيه قيمة دالة الهدف، وقد يؤدى ذلك إلى دخول عملية الحل فى دورة غير منتهية، حيث قد نجد أنفسنا أمام حل سبق وأن توصلنا إليه فى مرحلة سابقة.

ولإيضاح هذه المشكلة وكيفية معالجتها، نقوم بدراسة جدول السمبلكس الأول - الذي يتضمن الحل المبدئي لإحدىمشاكل تعظيم الأرباح، وذلك كما يتبين من المثال التالي:

رو	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	س١	س٢	س٣	غ١	غ٢	غ٣
			٢	صفر	$\frac{3}{2}$	صفر	صفر	صفر
صفر	غ ١	٢	١	ـ ١	صفر	١	صفر	صفر
صفر	غ ٢	٤	٢	صفر	١	صفر	١	صفر
صفر	غ ٣	٣	١	١	١	صفر	صفر	١
اختبار المثالية ص و		صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
ر و ـ ص و			٢	صفر	$\frac{3}{2}$	صفر	صفر	صفر

أو

ولتعديل هذا الحل، واقتراح حل آخر أفضل منه نتبع الخطوات التالية:

١ـ عمود المتغير س١ هو عمود المفتاح: حيث أنه يقع فيه أعلى قيمة موجبة في صف التقييم النهائى (صف ر و ـ ص و).

٢ـ لاختيار صف المفتاح، أي تحديد المتغير الخارج الذي يحل س١ محله: فإننا نلاحظ من اختبار الصفوف الآتى:

صف غ١ = ٢ ÷ ١ = ٢

صف غ٢ = ٤ ÷ ٢ = ٢

صف غ٣ = ٣ ÷ ١ = ٣

ويتبين من اختبار الصفوف أن القيدين الأول والثاني يحققان نفس القيمة الموجبة الأصغر(٢)؛ فإذا قررنا اجتهادياً استبعاد غ١، وطبقا لقواعد تعديل الصفوف السابق إيضاحها، فإنه يكون لدينا الحل الاساسي الممكن التالي:

$ر_و$		٢	صفر	$\frac{3}{2}$	صفر	صفر	صفر
	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	$س_١$	$س_٢$	$س_٣$	$غ_١$	$غ_٢$	$غ_٣$
٢	$س_١$	٢	١	ـ ١	صفر	١	صفر	صفر
صفر	$غ_٢$	صفر	صفر	٢	١	ـ ٢	١	صفر
صفر	$غ_٣$	١	صفر	٢	١	ـ ١	صفر	١
اختبار المثالية $ص_و$			٢	ـ ٢	صفر	٢	صفر	صفر
$ر_و$ ـ $ص_و$		٤	صفر	٢	$\frac{3}{2}$	ـ ٢	صفر	صفر

<u>والحل الأساسي الممكن الجديد يتمثل في:</u>

$س_١$ = ٢

$غ_٢$ = صفر

$غ_٣$ = ١

<u>ولكننا نلاحظ هنا بالنسبة للمتغير الأساسي $غ_٢$: أن قيمته تساوي الصفر؛ ويطلق على الحل في هذه الحالة: " الحل المعتل ".</u>

<u>ونلاحظ هنا أن تساوي أصغر كمية موجبة، هو السبب الرئيس لهذا الحل المعتل.</u> ويشكل ذلك صعوبات في العمليات الحسابية لطريقة السمبلكس؛ لأنه إذا تم الاستمرار في تطبيق الطريقة فإننا نجد الآتى:

١ـ عمود المتغير $س_٢$ هو عمود المفتاح.

٢ـ وبتطبيق قاعدة اختبار الصفوف وتحديد أصغر كمية موجبة نجد أن:

صف $س_١$ = ٢ ÷ (-١) = ـ٢

صف $غ_٢$ = صفر ÷ ٢ = صفر (أصغر كمية موجبة)

صف $غ_٣$ = ١ ÷ ٢ = $\frac{1}{2}$

ويوضح اختبار الصفوف أن المتغير س$_٢$ سوف يحل محل المتغير غ$_٢$ ؛ إلا أن أصغر كمية موجبة تساوي صفر، وهذا يعني أن غ$_٢$ لا يمكن زيادته حتي يكون له قيمة موجبة، ومعناه أيضاً أنه لن يطرأ تحسين على دالة الهدف نتيجة هذا التعديل.

وإذا أجري أي تعديل آخر في الأساس، فإن ذلك لن يؤدي إلي زيادة قيمة دالة الهدف.

ويلاحظ هنا أنه يجب أن الاستمرار في تطبيق طريقة السمبلكس، غير أن أقصى قيمة للأرباح في هذه المشكلة، لا يمكن الوصول إليها، إلا عندما تكون معاملات كل المتغيرات في صف التقييم النهائي صفرية أو سالبة، ولا يمكن تحقيق هذه الحالة الأخيرة.

ويتمثل حل هذه المشكلة في اتخاذ قرار اجتهادي، يتعلق بتحديد أي متغير أساسي منهما يجب أن يترك الحل، حتي يتم التوصل إلي الحل الذي يقترب من الأمثل.

مثال (٢):

المطلوب تحديد القيمة القصوى للدالة التالية:

ر = ١١ س$_١$ + ٦ س$_٢$

فى ظل القيود التالية:

٦ س$_١$ + ٣ س$_٢$ ≥ ١٨

٥ س$_١$ + ٣ س$_٢$ ≥ ١٥

س$_١$، س$_٢$ ≤ صفر

ويظهر جدول السمبلكس الأول على النحو التالي:

رو			١١	٦	صفر	صفر
	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	س١	س٢	غ١	غ٢
صفر صفر	غ١	١٨	٦	٣	١	صفر
	غ٢	١٥	٥	٣	صفر	١
اختبار المثالية	صو	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
	رو ـ صو		١١	٦	صفر	صفر

أو

حيث نلاحظ هنا أن المتغير الداخل هو س١ ؛ ولتحديد المتغير المستبعد يتم قسمة عناصر عمود قيم متغيرات الحل على العناصر المقابلة فى عمود س١ كما يلى:

صف غ١ $\frac{١٨}{٦}$ = ٣

صف غ٢ $\frac{١٥}{٣}$ = ٣

وبذلك نستطيع اختيار أحد المتغيرات غ١ أو غ٢ للخروج من الحل الحالى، فإذا قمنا باختيار غ١، فإن الجدول الثانى يظهر على النحو التالي:

رو			١١	٦	صفر	صفر
	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	س١	س٢	غ١	غ٢
١١	س١	٣	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٦}$	صفر
صفر	غ٢	صفر	صفر	$\frac{١}{٢}$	$-\frac{٥}{٦}$	١
اختبار المثالية	صو	٣٣	١١	$\frac{١١}{٢}$	$\frac{١١}{٦}$	صفر
	رو ــ صو		صفر	$\frac{١}{٢}$	$-\frac{١١}{٦}$	صفر

حيث يعنى هذا الحل أن $س_١ = ٣$ ؛ في حين أن باقى المتغيرات تساوى صفراً، حيث نلاحظ هنا أن هذا الحل يفقد صفة الحل الأساسي، حيث أن عدد القيود = ٢ ؛ بينما عدد المتغيرات التى تأخذ قيمة غير صفرية= ١؛ ولذلك يعتبر هذا الحل معتلاً.

وكما سبقت الإشارة، فإننا نلاحظ هنا أنه يجب الاستمرار في الحل بطريقة السمبلكس، غير أن أقصى قيمة للأرباح في هـــــــذه المشكلة لا يمكننا التوصل إليها، إلا عندما تكون معاملات كل المتغيرات في صف التقييم النهائي صفرية أو سالبة؛ ولا يمكن تحقيق هذه الحالة الأخيرة؛ ومن ثم فإن حل هذه المشكلة يتمثل فى اتخاذ قرار اجتهادي يتعلق بتحديد أي متغير أساسى منهما يجب أن يترك الحل، حتى يتم التوصل إلى الحل الذي يقترب من الأمثل.

ثالثاً: حالة الحل غير المحدود [أو: الحلول التي لا حدود لها]:

وهي تلك الحالة التي تحدث حينما لا نجد لدالة الهدف حداً أقصى، بمعنى أننا عندما نقوم بتطبيق قاعدة أصغر قيمة موجبة: لا نستطيع تحديد المتغير الأساسي – صف المفتاح – الذي يجب أن يترك الحل؛ ويحدث ذلك فى حالة إذا ما كانت قيمة جميع عناصر عمود المتغير المرشح للدخول فى الحل (العمود الرئيس) سالبة أو صفر؛ وهذا يعنى أنه عند تحديد المتغير المطلوب إخراجه من الحل، بقسمة عناصر عمود قيم متغيرات الحل ÷ العناصر المقابلة فى العمود الرئيس، نجد أن ناتج القسمة سيكون سالباً أو ما لانهاية؛ مما يعنى أن المتغير المرشح للدخول فى الحل سيأخذ قيمة سالبة، مما يتنافى مع شرط عدم السالبية؛ وفى مثل هذه الحالة فإنه يجب التوقف عن الاستمرار في الحل؛ حيث نكون حينئذٍ بصدد حالة ليس لها حل محدود.

- **ويمكن توضيح هذه الحالة بالمثال التالى:**

المطلوب تعظيم الدالة التالية:

$$ر = ١٠ س_١ + ٤ س_٢$$

حيث يمكن أن نتبين ذلك، من استقراء جداول السمبلكس التالية

والخاصة بحل نموذج البرمجة الخطية:

ر$_و$	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	س$_1$	س$_2$	غ$_1$	غ$_2$
			١٠	٤	صفر	صفر
صفر	غ$_1$	٢٤	٤	- ٦	١	صفر
صفر	غ$_2$	٢٠	٥	- ٤	صفر	١
اختبار المثالية ص$_و$		صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
ر$_و$ ــ ص$_و$			١٠	٤	صفر	صفر

ر$_و$	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	س$_1$	س$_2$	غ$_1$	غ$_2$
			١٠	٤	صفر	صفر
صفر	غ$_1$	٨	صفر	$-\frac{14}{5}$	١	$-\frac{4}{5}$
١٠	س$_1$	٤	١	$-\frac{4}{5}$	صفر	$\frac{1}{5}$
اختبار المثالية ص$_و$		٤٠	١٠	٨ -	صفر	٢
ر$_و$ ــ ص$_و$			صفر	١٢	صفر	٢ -

ونظراً لأن جميع معاملات عمود س$_2$ ؛ وهو المتغير المرشح للدخول في الحل التالي: سالبة؛ فإن هذا يعني أن هذه تعتبر مشكلة ليس لها حلاً أمثلاً محدوداً؛ وبما أن جميع قيم عناصر عمود س$_2$ سالبة؛ فإن هذا يعني أن قيمة عنصر(ر$_و$- ص$_و$) أسفل هذا العمود ستظل دائما موجبة مهما كان عدد مرات تكرار الحل.

هذا ومن المهم أن نشير هنا إلى أنه من الناحية الواقعية؛ فإن هذه المشكلة لا تواجهنا في الحياة العملية، حيث أن وجود هذه المشكلة إنما يعني في حقيقة الأمر: توافر الموارد بصورة لا نهائية، ولا يخفى أن هذا أمر غير

منطقى ولا يتفق مع حقيقة ندرة الموارد الاقتصادية المتاحة لأى منشأة؛ وعلى ذلك فإن ظهور هذه المشكلة يعنى أن وقوع خطأ ما، سواءً فى مرحلة صياغة المشكلة، أو في مرحلة الحل.

رابعاً: حالة تعدد المثالية في البرمجة الخطية[أو: حالة تعدد الحلول المثلى]:

وتحدث هذه الحالة عند وجود قيمة صفر فى صف (ر و ـ ص و)؛ تحت أحد المتغيرات غير الأساسية فى الحل الأمثل (أى أن هذا المتغير الذى ظهر أسفل العمود الخاص به صفر لم يظهر فى عمود متغيرات الحل الأمثل)؛ وهذا يعنى أنه يمكن إدخال هذا المتغير غير الأساسى فى جدول الحل الأمثل الحالى، فيؤدى ذلك إلى تحقيق نفس قيمة دالة الهدف، ولكن من خلال تشكيلة منتجات أخرى بديلة؛ ويقال فى هذه الحالة: أن هناك عدة حلول مثلى لهذه المشكلة.

أما فى حالة عدم وجود قيمة صفر فى صف (ر و ـ ص و)؛ تحت أحد المتغيرات غير الأساسية؛ فإن هذا الحل يعتبر هو الحل الأمثل الوحيد.

ويلاحظ أن وجود مجموعة من الحلول المختلفة التي تصل بنا إلى نفس النتيجة النهائية المثلى، يُطلق عليها في البرمجة الخطية: حالة تعدد المثالية (أو حالة المثاليات البديلة).

ولتوضيح حالة تعدد المثالية عند تحديد مزيج الإنتاج الأمثل، يتم استعراض المثال التالي:

مثال:

تقوم إحدى منشآت الأعمال الصناعية، بإنتاج منتجين: س، ص، يحقق كل منهما عائد مساهمة للوحدة: ١٢ جنيهاً، ٨ جنيهات، على الترتيب؛ والتالي احتياجات الوحدة من الساعات فى كل من قسمي: التجميع، والتشطيب، والساعات المتاحة فى كل قسم:

الأقسام	احتياجات الوحدة		الساعات المتاحة لكل قسم
	منتج س	منتج ص	
قسم التجميع	٦	٤	١٢٠
قسم التشطيب	٥	٦	١٥٠

وكان الحل الأمثل الذى يحقق أقصى ربح يظهرعلى النحو التالى:

ر و			١٢	٨	صفر	صفر
	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	$س_1$	$س_2$	$غ_1$	$غ_2$
١٢	$س_1$	٢٠	١	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	صفر
صفر	$غ_2$	٥٠	صفر	$\frac{8}{3}$	$-\frac{5}{6}$	١
اختبار المثالية ص و		٢٤٠	١٢	٨	٢	صفر
ر و - ص و			صفر	صفر	-٢	صفر

حيث تمثل $س_1$، $س_2$ الكميات الواجب إنتاجها من كل منتج، كما تمثل $غ_1$، $غ_2$ المتغيرات الراكدة المرتبطة بقيود الأقسام الإنتاجية.

حيث نجد هنا أن جدول الحل الأمثل البديل، يظهر على النحو التالي:

ر و			١٢	٨	صفر	صفر
	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	$س_1$	$س_2$	$غ_1$	$غ_2$
١٢	$س_1$	$\frac{15}{2}$	١	صفر	$\frac{3}{8}$	$\frac{1-}{4}$
٨	$س_2$	$\frac{75}{4}$	صفر	١	$\frac{5-}{16}$	$\frac{3}{8}$
اختبار المثالية ص و		٢٤٠	١٢	٨	٢	صفر
ر و - ص و			صفر	صفر	-٢	صفر

ويلاحظ من الجدول السابق أن المورد الانتاجي الثاني له طاقة عاطلة تبلغ ٥٠ ساعة؛ وهذه الطاقة العاطلة قد ظهرت في الحل الأمثل الأول، على الرغم من أنها لم تظهر في الحل الأمثل البديل.

ويمكن القول في ضوء ما سبق أن حالة تعدد المثالية ترتبط بوجود سعر ظل = صفر، تحت أعمدة أحد المتغيرات الراكدة غير الاساسية والتي لم تدخل الحل الأمثل.

ويجب هنا أن نلاحظ أن الحل الأمثل البديل؛ وعلى الرغم من أنه قد حقق نفس القيمة المثلى لدالة الهدف وهي ٢٤٠ جنيهاً؛ إلا أنه لم يحقق الاستغلال الكامل لطاقة المورد الثاني؛ إذ ترك طاقة فائضة (عاطلة) قدرها ٥٠ ساعة.

خامساً: حالة سالبية الطرف الأيسر للقيود:

من المعلوم أن طريقة السمبلكس تستلزم ضرورة ألا تكون قيم الطرف الأيسر للقيود سالبة، وذلك بهدف تسهيل عملية التوصل إلى حل مبدئى؛ فإذا كانت قيمة الطرف الأيسر لأي قيد سالبة: فإنه يمكن ضرب طرفى القيد فى (ــ ١)، مع ضرورة مراعاة تغيير إشارة المتباينة.

- **فعلى سبيل المثال، فإذا كانت متباينة أحد القيود بالشكل الآتي:**

٣س١ ــ ٢س٢ ≤ ــ ٣٠

فإننا للتخلص من الإشارة السالبة فى الطرف الأيسر: يجب ان نقوم بضرب طرفى المتباينة فى (ــ ١)، مع ضرورة مراعاة تغيير الإشارات فى كلا طرفيِّ المتباينة (كلا الطرفين)، وكذلك إشارة المتباينة لتصبح:

ــ٣س١ + ٢س٢ ≥ ٣٠

على أن يتم استكمال الحل بالخطوات المعتادة.

- **وكذلك فعلى سبيل المثال: إذا كان القيد على النحو التالي:**

٥ س١ ــ س٢ ≤ ــ ١٥

فبضرب طرفى المتباينة × (ــ ١) تصبح على النحو التالي:

ــ ٥ س١ + س٢ ≥ ١٥

على أن يتم استكمال الحل بالخطوات المعتادة.

سادساً: التعامل مع المعادلات والمتباينات ذات الإشارة (≤):

تناولنا فيما سبق: أساسيات طريقة السمبلكس على المتباينات ذات الإشارة أقل من أو يساوي (≥) ؛ والتي استقر حل نموذج البرمجة فيها،

على ضرورة تحويلها إلى معادلات، عن طريق إضافة المتغيرات الراكدة، وذلك بهدف تحديد الحل المبدئي؛ إلا أن الحياة العملية تزخر بالعديد من الحالات التي تتضمن مشكلة البرمجة الخطية فيها: معادلات أو متباينات ذات إشارة أكبر من أو تساوي (≤)؛ والتالي توضيح أسس كيفية التعامل، من خلال طريقة السمبلكس مع مثل تلك الحالات:

- **توافر نوعية المعادلات (=):**

يلاحظ أنه إذا كان أحد أو بعض قيود نموذج البرمجة الخطية، قد ظهر في صورة معادلة: فإن الأمر هنا لا يتطلب إضافة متغيرات راكدة، وذلك لأن المتغيرات الراكدة تستخدم في تحويل المتباينات إلى معادلات، فإذا كان القيد (على سبيل المثال) على النحو التالي:

$$س_{١} = ٣٦٠$$

$$س_{٢} = ٤٨٠$$

في هذه الحالة نجد أنه لا يوجد أي داعي لإضافة متغيرات راكدة؛ لأن هذين القيدين في هيئة معادلة؛ وإذا كان الحل المبدئي يفترض أن متغيرات القرار = صفر، بمعنى أن $س_{١}$ = صفر؛ و $س_{٢}$ = صفر، فإننا هنا نحتاج إلى ضرورة إضافة متغيرين جديدين يأخذان قيمة الطرف الأيسر في الحل المبدئي؛ حيث يلاحظ على هذه المتغيرات التي يتم إضافتها بهدف تحديد الحل المبدئي يُطْلَق عليها:"المتغيرات الإصطناعية"؛ وهي في الحقيقة عبارة عن: متغيرات وهميـــة لا علاقة لها بالمشكلة، غير أننا نقوم بإضافتها إلى قيود النموذج، لكي يمكننا تحديد الحل المبدئي؛ وبمجرد أقيام تلك المتغيرات الاصطناعية بأداء هذا الدور، فإننا يجب أن نتخلص منها لكي لا تظهر في الحل الأمثل.

وتظهر المعادلتان السابقتان بعد إضافـــة المتغيرين الإصطناعيين: $ى_{١}$ ؛ و $ى_{٢}$ على النحو التالي:

$$س_{١} + ى_{١} = ٣٦٠$$

$$س_{٢} + ى_{٢} = ٤٨٠$$

حيث نجد في الحل المبدئي، أن:

$س_1$ = صفر　　　　$ى_1$ = ٣٦٠

$س_2$ = صفر　　　　$ى_2$ = ٤٨٠

- **توافر نوعية المتباينات ذات الإشارة (≤):**

تشير هذه المتباينات إلى أن: قيمة الطرف الأيمن قد تساوي أو تزيد عن قيمة الطرف الأيسر؛ فعلى سبيل المثال فإن المتباينة التالية:

$س_1$ ≤ ١٨٠

$س_2$ ≤ ٣٢٠

فإننا لكي نقوم بتحويل هاتين المتباينتين، إلى معادلتين: فإن إشارة المتغيرات الراكدة تكون سالبة، أي تصبح المتباينتين على النحو التالي:

$س_1$ ـ $غ_1$ = ١٨٠

$س_2$ ـ $غ_2$ = ٣٢٠

وفي الحل المبدئي فإننا نجد أن:

$س_1$ = صفر، $غ_1$ = ـ ١٨٠؛

$س_2$ = صفر، $غ_2$ = ـ ٣٢٠؛

بمعنى أن قيمة كلٍ من: $غ_1$، و $غ_2$ سالبتين، وهو الأمر الذي يتنافى مع شرط عدم السالبية؛ ومن ثم فلكي يمكننا تحديد الحل المبدئي، فإننا يجب أن نضيف متغيرين إصطناعيين، يأخذان في الحل المبدئي قيمة تساوي قيمة الطرف الأيسر، وعلي ذلك تظهر المتباينتان السابقتان على النحو التالي:

$س_1$ ـ $غ_1$ + $ى_1$ = ١٨٠

$س_2$ ـ $غ_2$ + $ى_2$ = ٣٢٠

حيث نجد في الحل المبدئي أن:

$س_1$ = صفر　　　　$غ_1$ = صفر　　　　$ى_1$ = ١٨٠

$س_2$ = صفر　　　　$غ_2$ = صفر　　　　$ى_2$ = ٣٢٠

وهنا يجب ملاحظة أننا بعد أن نتوصل إلى الحل المبدئي: فإننا يجب أن نعمل على التخلص من المتغيرات الإصطناعية، لكي لا تظهر في الحل الأمثل.

نخلص مما سبق إلى أن نموذج البرمجة الخطية قد يشتمل على ثلاثة أنواع من المتغيرات: ١- متغيرات القرار ($س_١$، $س_٢$... الخ)؛ ٢-المتغيرات الراكدة ($غ_١$، $غ_٢$،...الخ)؛ ٣- المتغيرات الإصطناعية ($ى_١$، $ى_٢$،...).

وتجدر ملاحظة أنه يمكن التخلص من المتغيرات الإصطناعية ($ى_١$، $ى_٢$،...)؛ وذلك عن طريق إستخدام عدة طرق، من أهمها:

١- طريقة م الكبرى.

٢- طريقة المرحلتين.

• طريقة م الكبرى:

وترتكز هذه الطريقة على ضرورة القيام بإعطاء المتغيرات الإصطناعية معاملات في دالة الهدف، تضمن التخلص منها وعدم ظهورها في الحل الأمثل؛ ويرمز لهذه المعاملات بالرمز (م)، حيث تأخذ م قيمة كبيرة جداً بالمقارنة بالمعاملات الأخرى في دالة الهدف؛ غير أنه يجب ملاحظة أن:

- **تأخذ (م) إشارة سالبة: في المشكلات التي تتضمن إيجاد القيمة القصوى لدالة الهدف؛**
- **بينما تأخذ (م) إشارة موجبة: في المشكلات التي تتضمن إيجاد القيمة الدنيا لدالة الهدف؛**

حيث تعني الإشارة السالبة خسارة كبيرة جداً، كما تعني الإشارة الموجبة تكلفة مرتفعة جداً، وهو الأمر الذي يضمن التخلص من المتغيرات الإصطناعية. ويمكن توضيح هذه الطريقة بالمثال التالي:

- **مثال رقم (١):**

المطلوب تعظيم الدالة التالية:

$$ر = ١٠ س_١ + ٨ س_٢$$

وذلك، في ظل القيود التالية:

٥ $س_1$ + ٣ $س_2$ = ٧٤

٤ $س_1$ + ٢ $س_2$ ≥ ٦٠

$س_1$ ≤ ١٠

$س_1$، $س_2$ ≤ صفر

ويصبح النموذج السابق بعد إضافة المتغيرات الراكدة والإصطناعية على النحو التالي:

المطلوب تعظيم الدالة التالية:

ر= ١٠ $س_1$ +٨ $س_2$ + صفر $غ_1$ + صفر $غ_2$ – م $ى_1$ – م $ى_2$

في ظل القيود التالية:

٥ $س_1$ + ٣ $س_2$ + $ى_1$ = ٧٤

٤ $س_1$ + ٢ $س_2$ + $غ_1$ = ٦٠

$س_1$ – $غ_2$ + $ى_2$ = ١٠

$س_1$، $س_2$، $غ_1$، $غ_2$، $ى_1$، $ى_2$ ≤ صفر

ويمكن التوصل إلي الحل الأمثل لهذا النموذج باستخدام طريقة السمبلكس على النحو التالي:

			١٠	٨	صفر	صفر	
$ر_و$	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	$س_1$	$س_2$	$غ_1$	$غ_2$	
– م	$ى_1$	٧٤	٥	٣	صفر	صفر	
صفر	$غ_1$	٦٠	٤	٢	١	صفر	
– م	$ى_2$	١٠	(١)	صفر	صفر	– ١	⇦
اختبار المثالية $ص_و$		– ٨٤ م	– ٦م	–٣م	صفر	م	
$ر_و$ – $ص_و$			١٠+٦م ⇧	٨+٣م	صفر	– م	

- م	ى١	٢٤	صـفر	٣	صفر ١	(٥)	
صفر	غ١	٢٠	صفر	٢	صفر	٤	
١٠	س١	١٠	١	صفر		- ١	
اختبار المثالية							
صو		١٠٠- ٢٤م	١٠	- ٣ م	صفر	- ١٠ - ٥م	
رو - صو			صفر	٨+٣م	صفر	١٠+٥م	

رو	١٠	٨	صفر	صفر			
	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	س١	س٢	غ١	غ٢	
صفر	غ٢	٢٤/٥	صفر	(٣/٥)	صفر	١	
صفر	غ١	٤/٥	صفر	- ٢/٥	١	صفر	
١٠	س١	٧٤/٥	١	٣/٥	صفر	صفر	
اختبار المثالية							
صو		١٤٨	١٠	٦	صفر	صفر	
رو - صو			صفر	٢	صفر	صفر	

٨	س٢	٨	صفر	١	صفر	٥/٣	
صفر	غ١	٤	صفر	صفر	١	٢/٣	
١٠	س١	١٠	١	صفر	صفر	- ١	
اختبار المثالية							
ص و		١٦٤	١٠	٨	صفر	١٠/٣	
رو - ص و			صفر	صفر	صفر	- ١٠/٣	

ويتبين من الجدول الأخير أن الحل الأمثل يتمثل في:

س$_1$ = ١٠   س$_2$ = ٨   غ$_1$ = ٤

غ$_2$، ى$_1$، ى$_2$ = صفر   هامش المساهمة = ١٦٤

حيث أن: س$_1$، س$_2$ متغيرات القرار، غ$_1$ المتغير الراكد المرتبط بالقيد الثاني.

هذا، وبإمكاننا أن نتحقق من أن الحل الأمثل: إنما هو حل ممكن كما أنه يفي بقيود المشكلة؛ وذلك عن طريق القيام بالتعويض بقيم متغيرات الحل في القيود كما يتبين مما يلي:

القيد الأول:

٥ س$_1$ + ٣ س$_2$ + ى$_1$ = ٧٤

٥ × ١٠ + ٣ × ٨ + صفر   = ٧٤

القيد الثاني:

٤ س$_1$ + ٢ س$_2$ + غ$_1$ = ٦٠

٤ × ١٠ + ٢ × ٨ + ١ × ٤   = ٦٠

القيد الثالث:

س$_1$ ـ غ$_2$ + ى$_2$ = ١٠

١٠ ـ صفر + صفر   = ١٠

ويمكن حساب قيمة دالة الهدف وفقا للحل الأمثل بالتعويض بقيم متغيرات الحل الأمثل في دالة الهدف كما يتضح مما يلي:

ر = ١٠ س$_1$ + ٨ س$_2$

= ١٠ × ١٠ + ٨ × ٨ = ١٦٤

- **<u>طريقة المرحلتين:</u>**

وهنا يتم التوصل إلى الحل الأمثل من خلال مرحلتين:

- **<u>المرحلة الأولي:</u>**

ويتم فيها: التخلص من المتغيرات الإصطناعية، ولذلك تقتصر دالة الهدف علي المتغيرات الإصطناعية فقط؛ وتأخذ هذه المتغيرات معاملات في دالة الهدف تساوي (ـ١) في مشكلات تعظيم الربح؛ ومعاملات موجبة تساوي (١) في مشكلات تخفيض التكلفة؛ أما باقي متغيرات المشكلة فتأخذ معاملات = صفر في دالة الهدف؛ ويتم تحديد الحل المبدئي؛ على أن نستمر في الحل، إلى

أن يتم الوصول إلى الحل الأمثل لهذه المرحلة، والذي لا يتضمن المتغيرات الإصطناعية.

وإذا انتهت هذه المرحلة ولم يتم التخلص من المتغيرات الإصطناعية، أي إذا كانت بعض المتغيرات الإصطناعية تأخذ قيمة في الحل تزيد عن الصفر: فإن ذلك يعني أنه لا يوجد حل لهذه المشكلة، وفي هذه الحالة لا يتم الانتقال إلي المرحلة الثانية.

- **المرحلة الثانية:**

حيث يتم الانتقال إلى هذه المرحلة؛ إذا تم التخلص من المتغيرات الإصطناعية وإخراجها من الحل الأساسي، أو إذا أصبحت قيمة هذه المتغيرات في الحل الأساسي تساوي الصفر.

وتبدأ هذه المرحلة عن طريق تعديل معاملات دالة الهدف، بحيث يتم إعادة المعاملات الأصلية للمشكلة؛ كما يتم استبعاد الأعمدة الخاصة بالمتغيرات الإصطناعية من جدول السمبلكس؛ ثم يتم حساب عناصر صف اختبار المثالية؛ وتطبق بعد ذلك الخطوات المعتادة في طريقة السمبلكس، إلى أن يتم الوصول إلى الحل الأمثل للمشكلة.

ويمكن تطبيق طريقة المرحلتين علي المثال السابق، حيث تظهر جداول السمبلكس لكل مرحلة على النحو التالي:

ر و	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	س١	س٢	غ١	غ٢	ي١	ي٢
			صفر	صفر	صفر	صفر	ـ ١	ـ ١
ـ ١	ي١	٧٤	٥	٣	صفر	صفر	١	صفر
صفر	غ١	٦٠	٤	٢	١	صفر	صفر	صفر
ـ ١	ي٢	١٠	(١)	صفر	صفر	ـ ١	صفر	١
اختبار المثالية ص و		ـ ٨٤	ـ ٦	ـ ٣	صفر	١	ـ ١	ـ ١
ر و ـ ص و			٦	٣	صفر	ـ ١	صفر	صفر

			صفر	صفر	صفر	صفر	- ١	- ١
رو	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	س١	س٢	غ١	غ٢	ى١	ى٢
- ١	ى١	٢٤	صفر	٣	صفر	(٥)	١	- ٥
صفر	غ١	٢٠	صفر	٢	١	٤	صفر	- ٤
صفر	س١	١٠	١	صفر	صفر	- ١	صفر	١
اختبار المثالية صو		- ٢٤	صفر	- ٣	صفر	- ٥	- ١	٥
رو - صو			صفر	٣	صفر	٥ ↑	صفر	- ٦

صفر	غ٢	٢٤/٥	صفر	٣/٥	صفر	١	١/٥	- ١
صفر	غ١	٤/٥	صفر	- ٢/٥	١	صفر	- ٤/٥	صفر
صفر	س١	٧٤/٥	- ١	٣/٥	صفر	صفر	١/٥	صفر
اختبار المثالية صو		صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
رو_صو			صفر	صفر	صفر	صفر	- ١	- ١

جداول المرحلة الأولى

ونظراً لعدم وجود قيم موجبة في صف اختبار المثالية في الجدول الأخير: فإن الحل وفقا لهذا الجدول يعتبر هو الحل الأمثل للمرحلة الأولي؛ وتبدأ المرحلة الثانية بالجدول الأخير في المرحلة السابقة، على أن يتم تعديل معاملات دالة الهدف، بحيث توضع المعاملات الأصلية، كما يتم استبعاد أعمدة المتغيرات الإصطناعية، وتظهر جداول المرحلة الثانية على النحو التالي:

رو	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	س١	س٢	غ١	غ٢
			١٠	٨	صفر	صفر
صفر	غ٢	٢٤/٥	صفر	(٣/٥)	صفر	١
صفر	غ١	٤/٥	صفر	- ٢/٥	١	صفر
١٠	س١	٧٤/٥	١	٣/٥	صفر	صفر
اختبار المثالية صو		١٤٨	١٠	٦	صفر	صفر
رو - صو			صفر	٢	صفر	صفر

رو	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	س١	س٢	غ١	غ٢
			١٠	٨	صفر	صفر
٨	س٢	٨	صفر	١	صفر	٥/٣
صفر	غ١	٤	صفر	صفر	١	٢/٣
١٠	س١	١٠	١	صفر	صفر	-١
اختبار المثالية صو		١٦٤	١٠	٨	صفر	١٠/٣
رو - صو			صفر	صفر	صفر	- ١٠/٣

جداول المرحلة الثانية

ويلاحظ عدم وجود قيم موجبة في صف (رو ــ صو)، وبذلك نكون قد توصلنا إلي الحل الأمثل، والذي يتطابق مع نفس الحل الذي توصلنا إليه عن طريق استخدام وتطبيق طريقة م الكبرى.

الفصل الخامس

الطريقة العامة لحل نموذج البرمجة الخطية

حالة تخفيض (تدنية) التكاليف

تستخدم خطوات، وإجراءات تطبيق طريقة السمبلكس في مشاكل تخفيض التكاليف، بنفس الطريقة التي سبق إتباعها في مشاكل تعظيم الأرباح، مع بعض الاختلافات والتعديلات التي تنبع من طبيعة المشكلة ذاتها، حيث تتركز هذه المشكلة في تخفيض التكاليف إلى أدنى حد وليس تعظيم الأرباح.

هذا، وتتركز أهم أوجه الاختلاف بين تطبيق طريقة السمبلكس، في حالات تخفيض (تدنية) التكاليف؛ عنها في حالات تعظيم الربحية، في النقاط التالية:

1. **تتمثل دالة الهدف المطلوب تدنية أو تخفيض قيمتها في دالة تكلفة؛ في حين تتمثل دالة الهدف المطلوب تعظيم قيمتها في دالة ربح؛ ولكي يتوافر شرط الخطية في مثل تلك المشاكل، فإن التكلفة المطلوب تخفيضها إلى أدنى حد ممكن تتمثل في: التكلفة المتغيرة، وذلك نظراً لتوافرالعلاقة الخطية بين كلٍ من: التكلفة المتغيرة، ومستوي النشاط.**
2. **تركزالقيود في مشكلات تعظيم قيمة الدالة على: الموارد المحدودة، ومن ثم فإن المتباينات المرتبطة بها غالباً ما تكون في صورة أقل من أو يساوي (≥)؛ في حين أنه في مشكلات تدنية أو تخفيض قيمة دالة الهدف، فإن القيود تركز على: المواصفات الفنية التي يجب الوفاء بها، ومن ثم فإن المتباينات المرتبطة بها غالباً ما تكون في صورة أكبر من أو يساوي (≤)؛ وقد تتضمن بعض المشاكل قيوداً مختلطة؛ أو بمعنى آخر فإنه في مشاكل تعظيم الأرباح، فإن معظم القيود الأساسية للطاقة أو الموارد المحدودة هي من نوعية: أصغر من أو يساوي" ≤ "، ويتم تحويل هذا النوع من المتباينات إلي معادلات عن طريق إضافة متغيرات راكدة، حيث يبدأ الحل**

المبدئي بإدخال هذه المتغيرات الراكدة في الأساس، وتكون قيم المتغيرات الأصلية = صفراً، بمعنى الابتداء من نقطة الصفر، ثم يتم تحسين الحل واقتراح حل آخر أفضل منه في ضوء اختبار المثالية، وذلك إلى أن يتم التوصل إلى الحل الامثل الذي يحقق أقصى ربحية؛ وذلك في الوقت الذي نجد فيه في مشاكل تدنية أو تخفيض التكاليف، أنه عادةً ما تظهر مجموعة القيود في صورة متباينات من نوعية: أكبر من أو يساوي" ≤"، والتي يستلزم تحويلها إلي معادلات: ضرورة إضافة متغيرات راكدة باشارة سالبة، ويكون معامل التكلفة الخاص بها = صفراً؛ غير أنه يلاحظ أنه إذا جعلنا المتغيرات الأصلية = صفراً طبقا للقاعدة المتبعة في البرنامج المبدئي في مشاكل تعظيم الربحية، فإن قيم هذه المتغيرات الراكدة سوف تصبح سالبة، الأمر الذي يخالف شرط عدم السالبية؛ ولذلك يتم إضافة متغيرات أخرى إصطناعية بإشارة موجبة، بحيث يمكن بدء الاساس في طريقة السمبلكس بداية سليمة، كما يلاحظ أنه يجب استبعاد تلك المتغيرات الاصطناعية من المشكلة قبل أن نصل إلى الحل الأمثل؛ ولكي يمكن تحقيق ذلك، فإنه يتم ربط كل متغير من المتغيرات الاصطناعية، بمعامل تكلفة متناهي في الكبر في دالة الهدف، بحيث يرمز له بالرمز (م)، ثم يتم استبعاده للأسباب الاقتصادية، بمعنى ضرورة العمل على استبعاده من الأساس في عملية تدنية (تخفيض) التكاليف، إلى أن نصل إلى الحل الأمثل الذي يؤكد عدم إحتوائه على أية تكلفة مغالى فيها، حيث أن الهدف هنا يتمثل في تخفيض أو تدنية التكاليف والوصول بها إلى أدنى حد ممكن.

٣) لا تختلف الخطوات الرئيسة لحل المشاكل التي تتضمن الوصول إلى تدنية أو تخفيض قيمة دالة الهدف باستخدام طريقة السمبلكس، عنها في المشاكل التي تتضمن تعظيم قيم دالة الهدف؛ إلا فيما يتعلق باختبار المثالية وتحديد المتغير المطلوب إدخاله لتحسين الحل، حيث يتمثل التغيير في خطوات طريقة السمبلكس في التالي:

أ - اختبار المثالية: حيث يلاحظ أن معيار التوصل إلي الحل الأمثل يتمثل في أن تكون عناصر صف (ر$_و$ - ص$_و$) أكبر من أو تساوي الصفر؛ في حين أنه في مشكلات تعظيم الربحية، فإن معيار الوصول إلي الحل الأمثل يتمثل في أن تكون عناصر صف (ر$_و$ - ص$_و$) أقل من أو تساوي صفر؛ ويدل وجود قيم سالبة في صف اختبار المثالية في مشكلات تخفيض أو تدنية التكاليف، على أن هناك إمكانية في تحسين الحل وإحداث خفض آخر في دالة الهدف، وبالتالي فإن ذلك يتطلب تعديل الحل، بإدخال متغيرات جديدة محل المتغيرات الأساسية الحالية، وهذا يعني أن الحل الحالي حل غير أمثل.

ب- يتم اختيار المتغير المرشح للدخول علي أساس المتغير (أو العمود) الذي تكون قيمته أكبر قيمة سالبة في صف اختبار المثالية؛ أي في صف (ر$_و$ - ص$_و$)، وذلك بهدف إحداث أكبر تخفيض ممكن في دالة الهدف؛ أو بمعنى آخر فإن المتغير الذي يجب أن يدخل الأساس في مشاكل تعظيم الأرباح: هو ذلك المتغير ذو أكبر قيمة موجبة، كما تظهر في صف (ر$_و$ - ص$_و$)، حيث يوضح المعامل الموجب لهذا المتغير، أن إضافة وحدة واحدة منه سوف تؤدي إلي زيادة قيمة دالة الهدف؛ بينما يوضح المعامل السالب في صف التقييم النهائي أن المتغير الذي له هذا المعامل السالب، سوف تؤدي إضافة وحدة واحدة منه، إلى تخفيض قيمة دالة الهدف؛ وتتوقف طريقة السمبلكس، ونكون قد توصلنا حينئذٍ إلى الحل الامثل عندما تكون معاملات كل المتغيرات في صف التقييم النهائي صفرية أو سالبة.

غير أنه في مشاكل تدنية (تخفيض) التكاليف، فإنه يتم اختيار المتغير الذي يدخل الأساس والذي تكون قيمة معامله سالبة في صف (ر$_و$ — ص$_و$)، لأن المعامل السالب يساهم في تخفيض التكاليف؛ ويتم اختيار المتغير ذي أكبر معامل سالب في صف (ر$_و$ — ص$_و$) ليدخل الأساس، لأنه يساهم أكثر من غيره في تحسين دالة الهدف؛ أي يساهم في التوصل إلي أكبر تخفيض ممكن للتكاليف؛ ويتم التوصل إلي الحل الامثل عندما تكون معاملات كل المتغيرات في صف (ر$_و$ — ص$_و$): صفرية أو موجبة؛ بمعنى أن إضافة وحدة واحدة من هذه المتغيرات، لن تؤثر على التكاليف أو سوف تؤدي إلى زيادتها.

ويمكن توضيح خطوات تطبيق طريقة السمبلكس، في مشاكل تخفيض (تدنية) التكاليف، من الأمثلة التالية:

▪<u>مثال (١):</u>

تقوم إحدي المنشآت الصناعية بإنتاج نوعين من المنتجات س، ص، وذلك باستخدام ثلاث أنواع من الخامات: أ، ب، جـ؛ ويظهر الجدول التالي احتياجات كل منتج من كل نوع من أنواع الخامات، والحد الأدنى للاحتياجات المطلوبة من كل نوع من المواد الخام، وذلك كالتالي:

الخامات	المنتجـــــــــات		أدنى حد من الاحتياجات
	س	ص	
أ	٤	٥	٢٠
ب	١٢	٣	٣٠
جـ	٣	٢	١٢

فإذا كانت تكلفة الوحدة من المنتج س: ٣ جنيهات، ومن المنتج ص: ٢جنيهاً.

والمطلوب:التوصل إلى الحل الامثل الذي يعمل على تدنية أو تخفيض التكاليف إلى أدنى حد ممكن، وذلك مستخدماً طريقة السمبلكس.

●<u>صياغة نموذج البرمجة الخطية لتدنية التكاليف:</u>

▪ دالة الهدف:

المطلوب تخفيض (تدنية) الدالة ت = ٣س$_{١}$ + ٢س$_{٢}$

▪ وذلك طبقا للقيود التالية:

٤س$_{١}$ + ٥س$_{٢}$ ≤ ٢٠

١٢س$_{١}$ + ٣س$_{٢}$ ≤ ٣٠

٣س$_{١}$ + ٢س$_{٢}$ ≤ ١٢

▪ وذلك طبقاً لشرط عدم السالبية:

س$_{١}$، س$_{٢}$ ≤ صفر

- **تحويل المتباينات إلي معادلات:**

يتم تحويل المتباينات التي من النوع "اكبر من أو يساوي" ≤ إلي معادلات؛ عن طريق اضافة متغيرات راكدة بإشارة سالبة، ولها معامل تكلفة = صفر؛ ثم اضافة متغيرات اصطناعية بإشارة موجبة، ولها معامل تكلفة متناهي في الكبر (م) ؛ وعادة ما تأخذ الرموز ر$_1$، ر$_2$....ر$_ن$ لتميزها عن كلٍ من: المتغيرات الأصلية، والمتغيرات الراكدة، حيث يظهر ذلك على النحو التالي:

٤س$_1$ + ٥س$_2$ ـ غ$_1$ +ر$_1$ = ٢٠

١٢س$_1$ + ٣س$_2$ ـ غ$_2$ +ر$_2$ = ٣٠

٣س$_1$ + ٢س$_2$ ـ غ$_3$ +ر$_3$ = ١٢

جدول الحل المبدئي:

يظهر جدول السمبلكس الأول كالتالي:

ت و			٣	٢	صفر	صفر	صفر
	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	س$_1$	س$_2$	غ$_1$	غ$_2$	غ$_3$
م	ر ١	٢٠	٤	٥	ـ ١	صفر	صفر
م	ر ٢	٣٠	١٢	٣	صفر	ـ ١	صفر
م	ر ٣	١٢	٣	٢	صفر	صفر	ـ ١
اختبار المثالية ص و		٦٢ م	١٩ م	١٠ م	ـ م	ـ م	ـ م
ت و ـ ص و			٣ ـ ١٩م	٢ ـ١٠م	م	م	م

- **قواعد إعداد جداول السمبلكس:**

يوضح الجدول المبين أعلاه (الحل المبدئي): أنه يحقق تكلفة مغالى فيها تبلغ (٦٢م)، كما يتبين من قيم معاملات المتغيرات في صف (ر و ـ ص و)، أنها معاملات سالبة، وهذا يعني أن الحل السابق لا يمثل الحل الامثل، ومن ثم فلابد من تحسين الحل، بالانتقال إلى حل آخر أفضل منه على النحو التالي:

١- يظهر تحت عمود المتغير س$_1$ أكبر قيمة سالبة في صف (ر و ـ ص و)، وعلى ذلك فإن عمود س$_1$ يعتبر هو عمود المفتاح.

٢- **يتم اختبار الصفوف لتحديد المتغير الخارج الذي يحل $س_١$ محله وذلك على النحو التالي:**

صف $ر_١$ = ٢٠ ÷ ٤ = ٥

صف $ر_٢$ = ٣٠ ÷ ١٢ = $\frac{5}{2}$ (وهي هنا تمثل أصغر قيمة موجبة)

صف $ر_٣$ = ١٢ ÷ ٣ = ٤

وعلى ذلك فإن صف $ر_٢$ يعتبر هو صف المفتاح، لأنه يمثل أصغر قيمة موجبة.

٣- **رقم المفتاح هو (١٢)**

٤- **تعديل الصفوف:**

أولاً: تعديل صف المفتاح وذلك عن طريق: قسمة الأرقام الظاهرة فيه ÷ رقم المفتاح ١٢ ، حيث يظهر ذلك على النحو التالي:

[$\frac{5}{2}$ ١ $\frac{1}{4}$ صفر $-\frac{1}{12}$ صفر]

ثانياً: تعديل صف $ر_١$ وفقاً للقاعدة السابق توضيحها (في نموذج البرمجة حالة تعظيم الربحية) مع ملاحظة أن المعدل الثابت= $\frac{1}{3}$

القاعدة التي تتبع في تعديل الصفوف الأخرى، تقوم علي الأساس التالي:

الرقم الجديد= الرقم في الصف القديم – [(الرقم المناظر في صف المفتاح)×معدل ثابت]

حيث أن: المعدل الثابت = $\frac{\text{الرقم القديم فى عمود المفتاح}}{\text{رقم المفتاح}}$

٢٠ − ٣٠ × $\frac{1}{3}$ = ١٠

٤ − ١٢ × $\frac{1}{3}$ = صفر

٥ − ٣ × $\frac{1}{3}$ = ٤

−١ − صفر × $\frac{1}{3}$ = −١

صفر – (–١) × $\frac{1}{3}$ = $\frac{1}{3}$

صفر – صفر × $\frac{1}{3}$ = صفر

<u>ثالثاً: تعديل صف</u> ر٣ مع ملاحظة أن المعدل الثابت= $\frac{1}{4}$

١٢ – ٣٠ × $\frac{1}{4}$ = $\frac{18}{4}$

٣ – ١٢ × $\frac{1}{4}$ = صفر

٢ – ٣ × $\frac{1}{4}$ = $\frac{5}{4}$

صفر – صفر × $\frac{1}{4}$ = صفر

صفر – (–١) × $\frac{1}{4}$ = $\frac{1}{4}$

–١ – صفر × $\frac{1}{4}$ = – ١

ومن ثم فإن جدول السمبلكس الثاني سيظهر على النحو التالي:

ت و	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	٣ س١	٢ س٢	صفر غ١	صفر غ٢	صفر غ٣
م	ر١	١٠	صفر	٤ (مُحاط بدائرة)	١-	$\frac{1}{3}$	صفر
٣	س١	$\frac{5}{2}$	١	$\frac{1}{4}$	صفر	$-\frac{1}{12}$	صفر
م	ر٣	$\frac{18}{4}$	صفر	$\frac{5}{4}$	صفر	$\frac{1}{4}$	١-
اختبار المثالية ص و		$\frac{15}{2}+\frac{29}{2}$ م	٣	$\frac{3}{4}+\frac{21م}{4}$	– م	$\frac{1-}{4}+\frac{7}{12م}$	– م
ت و – ص و			صفر	$\frac{5}{4}-\frac{21م}{4}$	م	$\frac{1}{4}-\frac{7}{12م}$	م

هذا وقد تم حساب أدنى تكلفة [صف ص$_و$] كالتالى:

١- أدنى تكلفة = ١٠م + $\frac{15}{2}$ + $\frac{18}{4}$م = $\frac{15}{2}$ + $\frac{29}{2}$م

هذا وقد تم حساب الأرقام الظاهرة في صف (ت$_و$ ـ ص$_و$) كالتالى:

١- عمود س$_١$ = ٣ـ (م × صفر + ٣×١ + م× صفر) = صفر

٢- عمود س$_٢$ = ٢ـ (٤م + $\frac{3}{4}$ + $\frac{5}{4}$م) = $\frac{5}{4}$ ـ $\frac{21}{4}$م

٣- عمود غ $_١$ = صفر – (ـ م + صفر + صفر) = م

٤- عمود غ $_٢$= صفر – ($\frac{1}{3}$م ـ $\frac{1}{4}$ + $\frac{1}{4}$م) = $\frac{1}{4} - \frac{7}{12}$م

٥- عمود غ $_٣$ = صفر – (صفر + صفر – م) = م

▪**تحسين الحل:**

١- **يلاحظ أن عمود س$_٢$ يمثل عمود المفتاح، وذلك نظراً لأن له أكبر قيمة سالبة تساهم في تخفيض التكاليف.**

٢- **يتم اختبار الصفوف بهدف تحديد المتغير الخارج، والذى يحل س$_٢$ محله كالتالى:**

صف ر$_١$ = ١٠ ÷ ٤ = $\frac{5}{2}$ (وهي تمثل هنا أصغر قيمة موجبة)

صف س$_١$ = $\frac{5}{2} \div \frac{1}{4} = 10$

صف ر$_٣$ = $\frac{18}{4} \div \frac{5}{4} = \frac{18}{5}$

ومن ثم فإن صف ر$_١$ يمثل صف المفتاح، لأن له أصغر قيمة موجبة.

٣- **رقم المفتاح هو (٤)**

٤- **تعديل الصفوف:**

أ. **تعديل صف المفتاح بقسمة الأرقام الظاهرة فيه ÷ ٤** ، حيث يظهر على النحو التالي:

$\frac{5}{2}$ صفر ١ $-\frac{1}{4}$ $\frac{1}{12}$ صفر

ب. تعديل الصفوف:

تعديل صف س١ مع ملاحظة أن المعدل الثابت $\frac{1}{16}$

$$\frac{5}{2} - 10 \times \frac{1}{16} = \frac{30}{16}$$

$$\text{١ ـ صفر} \times \frac{1}{16} = 1$$

$$\frac{1}{4} - \text{٤} \times \frac{1}{16} = \text{صفر}$$

$$\text{صفر} - (\text{-١}) \times \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$$

$$-\frac{1}{12} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{16} = -\frac{5}{48}$$

$$\text{صفر} - \text{صفر} \times \frac{1}{16} = \text{صفر}$$

تعديل صف ر٣ مع ملاحظة أن المعدل الثابت = $\frac{5}{16}$

$$\frac{18}{4} - 10 \times \frac{5}{16} = \frac{22}{16}$$

$$\text{صفر} - \text{صفر} \times \frac{5}{16} = \text{صفر}$$

$$\frac{5}{4} - 4 \times \frac{5}{16} = \text{صفر}$$

$$\text{صفر} - (\text{-١}) \times \frac{5}{16} = \frac{5}{16}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \times \frac{5}{16} = \frac{7}{48}$$

$$\text{-١ ـ صفر} \times \frac{5}{16} = -1$$

ويظهر جدول السمبلكس الثالث كالتالي:

ت و	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	٣ س١	٢ س٢	صفر غ١	صفر غ٢	صفر غ٣
٢	س٢	$\frac{5}{2}$	صفر	١	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	صفر
٣	س١	$\frac{30}{16}$	١	صفر	$\frac{1}{16}$	$-\frac{5}{48}$	صفر
م	ر٣	$\frac{22}{16}$	صفر	صفر	$\frac{5}{16}$ (مُحاط بدائرة)	$\frac{7}{48}$	-١
اختبار المثالية ص و		$\frac{170}{16}+\frac{22}{16}م$	٣	٢	$-\frac{5}{16}+\frac{5}{16}م$	$-\frac{23}{48}+\frac{7}{48}م$	ـ م
ت و ـ ص و			صفر	صفر	$\frac{5}{16}-\frac{5}{16}م$	$\frac{23}{48}-\frac{7}{48}م$	م

<u>وقد تم حساب أدنى تكلفة (ص و) كالتالي:</u>

أدنى تكلفة = $(\frac{5}{2}\times 2+\frac{30}{16}\times 3+\frac{22}{16}\times م)=\frac{170}{16}+\frac{22}{16}م$

<u>وقد تم حساب أرقام صف (ت و ـ ص و) كالتالي:</u>

١- عمود س١ =٣ـ (٢× صفر + ٣ ×١ + م × صفر) = صفر

٢- عمود س٢ =٢ـ (٢× ١ + ٣ × صفر + م × صفر) = صفر

٣- عمود غ١ = صفر - $(-\frac{1}{4}\times 2+\frac{1}{16}\times 3+\frac{5}{16}م)=\frac{5}{16}-\frac{5}{16}م$

٤- عمود غ٢ = صفر - $(\frac{1}{12}\times 2+(-\frac{5}{48})\times 3+\frac{7}{48}\times م)=-\frac{23}{48}-\frac{7}{48}م$

٥- عمود غ٣ = صفر – (٢× صفر + ٣ × صفر + (م× ـ ١)= م

- **<u>تحسين الحل:</u>**

يتبين من معاملات المتغيرات كما تظهر في صف التقييم النهائي أنه ما زال هناك معاملات سالبة يمكن أن تساهم في تخفيض التكاليف، ويتحدد اقتراح حل آخر أفضل من السابق كالتالي:

١- **عمود س$_٣$ هو عمود المفتاح؛ حيث أن له أكبر قيمة سالبة.**

٢- **اختبار الصفوف لتحديد المتغير الخارج الذي يحل س$_٣$ محله يتم على النحو التالي:**

صف س$_٢$ = $\frac{5}{2} \div -\frac{1}{4} = -10$

صف س$_١$ = $\frac{30}{16} \div \frac{1}{16} = 30$

صف س$_٣$ = $\frac{22}{16} \div \frac{5}{16} = \frac{22}{5}$ **(وهي تمثل أصغر قيمة موجبة).**

وبذلك يكون صف ر$_٣$ هو صف المفتاح، حيث أنه ذو أصغر قيمة موجبة.

٣- **رقم المفتاح هو** $\frac{5}{16}$

٤- **تعديل الصفوف**

أ – تعديل صف المفتاح بقسمة الأرقام الظاهرة فيه على رقم المفتاح:

$\frac{22}{5}$ **صفر صفر ١** $\frac{7}{15}$ $-\frac{16}{5}$

ب- تعديل الصفوف:

تعديل صف س$_٢$ مع ملاحظة أن المعدل الثابت = $\frac{4}{5}$

$$\frac{5}{2} - \frac{22}{16} \times \frac{4}{5} = \frac{18}{5}$$

صفر – صفر × $-\frac{4}{5}$ **= صفر**

١– صفر × - $\frac{4}{5}$ **= ١**

$-\frac{1}{4} - \frac{5}{16} \times -\frac{4}{5} =$ **صفر**

$$\frac{1}{12} - \frac{7}{48} \times - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

صفر – (ـ١) × $-\frac{4}{5}$ = $-\frac{4}{5}$

تعديل صف س١ مع ملاحظة أن المعدل الثابت $\frac{1}{5}$

$$\frac{30}{16} - \frac{22}{16} \times \frac{1}{5} = \frac{8}{5}$$

١ـ صفر × $\frac{1}{5}$ = ١

صفر – صفر × $\frac{1}{5}$ = صفر

$\frac{1}{16} - \frac{5}{16} \times \frac{1}{5} =$ **صفر**

$$-\frac{5}{48} - \frac{7}{48} \times \frac{1}{5} = -\frac{4}{15}$$

صفر – (ـ ١) × $\frac{1}{5}$ = $\frac{1}{5}$

ويظهر جدول السمبلكس الرابع كالتالي:

ت و	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	٣ س١	٢ س٢	صفر غ١	صفر غ٢	صفر غ٣
٢	س٢	$\frac{8}{15}$	صفر	١	صفر	$\frac{1}{5}$	$-\frac{4}{5}$
٣	س١	$\frac{8}{5}$	١	صفر	صفر	$-\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$
صفر	س٣	$\frac{22}{5}$	صفر	صفر	١	$\frac{7}{15}$	$-\frac{16}{5}$
اختبار المثالية ص و ١٢			٣	٢	صفر	صفر	ـ ١
ت و ـ ص و			صفر	صفر	صفر	صفر	١

<u>وقد تم حساب أدنى تكلفة (ص و) كالتالي:</u>

أدنى تكلفة = ($\frac{18}{5}$ × ٢ + $\frac{8}{5}$ × ٣ + $\frac{22}{5}$ × صفر) = ١٢

<u>وقد تم حساب أرقام صف ($ت_و$ ــ $ص_و$) كالتالي:</u>

١- عمود $س_١$ = ٣ـ (٢ × صفر + ٣×١ + صفر× صفر) = صفر

٢- عمود $س_٢$ = ٢ـ (٢× ١ + ٣× صفر + صفر× صفر) = صفر

٣- عمود $غ_١$ = صفر – (٢ × صفر + ٣ × صفر + صفر × ١) = صفر

٤- عمود $غ_٢$ = صفر – ($\frac{1}{5}$ × ٢ + ($\frac{2-}{15}$) × ٣ + $\frac{7}{15}$ × صفر) = صفر

٥- عمود $غ_٣$ = صفر – ($\frac{4-}{5}$) × ٢ + $\frac{1}{5}$ × ٣ + ($\frac{16-}{5}$) × صفر) =١

- **<u>تفسيرالحل الأمثل:</u>**

يتبين من قيم معاملات المتغيرات والظاهرة في صف ($ت_و$ ــ $ص_و$) في جدول السمبلكس الرابع، أنها أصبحت كلها إما قيماً موجبة أو صفرية، ولا توجد أية قيم سالبة، ومن ثم فإنه لا توجد هناك أية إمكانية لتخفيض التكاليف إلى أكثر من ذلك؛ ونلاحظ هنا أن أية محاولة لتعديل الحل بإضافة وحدة من أحد المتغيرات، لن يؤثر علي التكاليف – بالنسبة للمعاملات الصفرية – بل قد يؤدي إلي زيادة التكاليف – بالنسبة للمعاملات الموجبة ، وعلى ذلك فإن جدول السمبلكس الرابع يعتبر بمثابة الحل الأمثل للمشكلة؛ والذي يتحدد كالتالي:

$س_١$ = $\frac{8}{5}$ وحدة

$س_٢$ = $\frac{18}{5}$ وحدة

$غ_١$ = $\frac{22}{5}$

$غ_٢$ = صفر

$غ_٣$ = صفر

كما أن أدنى تكلفة للإنتاج هي: ١٢ جنيهاً.

ويكون مقدار الخامات الداخلة في وحدة المنتج كالتالي:

المادة الخام أ = $\frac{8}{5} \times 4 + \frac{18}{5} \times 5 = \frac{122}{5}$

والمتغير الراكد غ ١ يمثل زيادة المادة الخام أ عن الحد الأدنى المقرر

$= \frac{122}{5} - 20 = \frac{22}{5}$

المادة الخام ب = $\frac{8}{5} \times 12 + \frac{18}{5} \times 3 = \frac{96}{5} + \frac{54}{5} = \frac{150}{5} = 30$

ونلاحظ هنا أنها تحقق الحد الأدنى للاحتياجات المطلوبة.

المادة الخام جـ = $\frac{8}{5} \times 3 + \frac{18}{5} \times 2 = \frac{24}{5} + \frac{36}{5} = \frac{60}{5} = 12$

ونلاحظ هنا أنها تحقق الحد الأدنى للاحتياجات المطلوبة.

- **<u>مثال (٢):</u>**

تنتج إحدى المنشآت الصناعية منتجاً مُكَوَّناً من خلط ثلاثة أنواع من المواد الخام هي: أ، ب، ج؛ وقد ورد للمنشأة طلب من أحد عملائها، بتوريد ١٠,٠٠٠ وحدة من هذا المنتج وفقا للشروط التالية:

١- ألا يزيد المستخدم من المادة الخام أ عن ٣٠٠٠ كيلو.

٢- وجوب استخدام ١٥٠٠ كيلو على الأقل من المادة الخام ب.

٣- وجوب استخدام ٢٠٠٠ كيلو على الأقل من المادة الخام ج.

هذا، وتبلغ تكلفة الكيلو من المادة الخام أ: ٨ جنيهات، ومن المادة الخام ب: ١٠ جنيهات، ومن المادة الخام ج: ١١ جنيهاً.

<u>والمطلوب: تحديد الكمية المثلى من كل مادة خام، والتي تؤدى إلى تدنية (تخفيض) التكلفة إلى أدنى حد ممكن.</u>

يلاحظ هنا أنه يمكن حل هذه المشكلة باستخدام طريقة السمبلكس وفقا للخطوات التالية:

- **<u>صياغة المشكلة:</u>**

يمكن صياغة هذه المشكلة على النحو التالي:

المطلوب تدنية (تخفيض) الدالة التالية:

د (ت) = ٨ س١ + ١٠ س٢ + ١١ س٣

فى ظل القيود التالية:

$س_1$ + $س_2$ + $س_3$ = ١٠,٠٠٠

$س_1$ ≥ ٣٠٠٠

$س_2$ ≤ ١٥٠٠

$س_3$ ≤ ٢٠٠٠

$س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ≤ صفر

حيث:

$س_1$: تمثل عدد الوحدات (الكيلو جرامات) من المادة الخام أ.

$س_2$: تمثل عدد الوحدات (الكيلو جرامات) من المادة الخام ب.

$س_3$: تمثل عدد الوحدات (الكيلو جرامات) من المادة الخام ج.

ويُقصد بالمتباينة الأولى $س_1$ ≥ ٣٠٠٠ : أنه يمكن استخدام كميات تساوى أو تقل عن ٣٠٠٠ كيلو من المادة الخام أ؛

أما المتباينة الثانية والثالثة فتعنيان: أنه يجب استخدام كميات تزيد عن ١٥٠٠ كيلو، ٢٠٠٠ كيلو من المادتين: ب، ج، على التوالي؛ كما يجب ألا تقل الكميات المستخدمة من هاتين المادتين عن:

١٥٠٠، ٢٠٠٠ كيلو على التوالى.

▪تحويل المتباينات إلى معادلات:

سبق وأن بينا في مشكلات تعظيم الأرباح، أننا يجب نبدأ بحل مبدئي يتضمن عدم إنتاج أية منتجات، مما يترتب عليه عدم تحقيق أية أرباح، وكذلك الحال أيضاً في مشكلات تدنية التكاليف: فإننا نبدأ أيضاً بحل مبدئي يتضمن تحقيق تكلفة كبيرة جداً؛ ونحاول فى المراحل التالية: أن نعمل على تحسين الحل، من خلال تخفيض التكلفة؛ إلى أن نصل إلى الحل الأمثل، والذى يتضمن أدنى تكلفة ممكنة.

فإذا أخذنا القيد الثانى $س_1$ ≥ ٣٠٠٠ ؛ فإننا يجب أن نضيف متغير راكد $غ_1$ ؛ حيث أن $س_1$ فى الحل الأمثل سيأخذ قيمة تساوى أو أقل من ٣٠٠٠؛ ولذلك فإن المتغير الراكد سيأخذ قيمة تساوى الفرق بين ٣٠٠٠ والقيمة التى تأخذها $س_1$ فى الحل الأمثل؛ وعلى ذلك فإن هذا القيد يصبح بعد تحويله إلى معادلة، على النحو التالي:

$س_1$ + $غ_1$ = ٣٠٠٠

وفى الحل المبدئى فإن $س_١$ = صفر، $غ_١$ = ٣٠٠٠

وبالنسبة للقيد الأول:

$س_١ + س_٢ + س_٣ = ١٠,٠٠٠$

فإننا نلاحظ أنه في الحل المبدئى إذا كانت $س_١$، $س_٢$، $س_٣$ = صفر، فإننا يجب أن نضيف متغير إصطناعي $ى_١$، ويأخذ في الحل المبدئى قيمة تساوى قيمة الطرف الأيسر وهو ١٠,٠٠٠

ويرتبط المتغير الإصطناعي، بمعامل في دالة الهدف تكون له قيمة كبيرة جدا (يرمز لها بالرمز م)، وذلك لكي نضمن عدم ظهور هذا المتغير في الحل الأمثل، وعلى ذلك يصبح القيد الأول:

$س_١ + س_٢ + س_٣ + ى_١ = ١٠,٠٠٠$

كذلك فإذا أخذنا القيدين: الثالث والرابع، فإنه يمكن تحويلهما إلى معادلات على النحو التالي:

$س_٢ - غ_٢ = ١٥٠٠$

$س_٣ - غ_٣ = ٢٠٠٠$

ويمثل المتغير الراكد $غ_٢$: القيمة التى يمكن أن يزيد بها $س_٢$ عن ١٥٠٠؛ فعلى سبيل المثال إذا أخذت $س_٢$ قيمة تساوى ٥٠٠٠ ؛ فإن $غ_٢$ = ٣٥٠٠ ؛ وينطبق ذلك أيضا بالنسبة للمتغير الراكد $غ_٣$ ؛ أما إذا أخذت $س_٢$ أو $س_٣$ فى الحل الأمثل قيمة تساوى الطرف الأيسر: فإن $غ_٢$، $غ_٣$ في الحل الأمثل، ستأخذ قيمة تساوى صفر.

وإذا أخذت $س_٢$، $س_٣$ قيمة تساوى صفر في الحل المبدئي: فإن $غ_٢$= -١٥٠٠، $غ_٣$ = - ٢٠٠٠، وهذه القيم تتنافى مع شرط عدم السالبية، ولذلك ولكي لا تظهر تلك المتغيرات في الحل المبدئى، فإننا نقوم بإضافة متغيرات إصطناعية تأخذ فى الحل المبدئى قيمة تساوى الطرف الأيسر من المتباينات، وترتبط بمعامل تكلفة كبير جداً في دالة الهدف، حتى نضمن عدم ظهور تلك المتغيرات فى الحل الأمثل؛ وإذا أضفنا المتغيرات الإصطناعية $ى_٢$، $ى_٣$ تصبح هذه القيود على النحو التالي:

$س_٢ - غ_٢ + ى_٢ = ١٥٠٠$

$س_٣ - غ_٣ + ى_٣ = ٢٠٠٠$

وفى الحل المبدئي: فإن $س_٢$، $غ_٢$، $س_٣$، $غ_٣$ = صفر، وبالتالى فإن:

$ى_٢$ = ١٥٠٠

$ى_٣$ = ٢٠٠٠

وبعد تحويل المتباينات إلى معادلات يصبح النموذج السابق، كما يلى:

<u>المطلوب تدنية الدالة التالية:</u>

د (ت) = ٨$س_١$ + ١٠$س_٢$ + ١١$س_٣$ + صفر$غ_١$ + صفر$غ_٢$ + صفر$غ_٣$ + م $ى_١$ + م $ى_٢$ + م $ى_٣$

<u>وذلك، فى ظل القيود التالية:</u>

$س_١$ + $س_٢$ + $س_٣$ + صفر $غ_١$ + صفر $غ_٢$ + صفر $غ_٣$

+ $ى_١$ + صفر $ى_٢$ + صفر $ى_٣$ = ١٠.٠٠٠

$س_١$ + صفر $س_٢$ + صفر $س_٣$ + $غ_١$ + صفر $غ_٢$ + صفر $غ_٣$

+ صفر $ى_١$ + صفر $ى_٢$ + صفر $ى_٣$ = ٣٠٠٠

صفر $س_١$ + $س_٢$ + صفر $س_٣$ + صفر $غ_١$ ـ $غ_٢$ + صفر $غ_٣$

+ صفر $ى_١$ + $ى_٢$ + صفر $ى_٣$ = ١٥٠٠

صفر $س_١$ + صفر $س_٢$ + $س_٣$ + صفر $غ_١$ + صفر $غ_٢$ ـ $غ_٣$

+ صفر $ى_١$ + صفر $ى_٢$ + $ى_٣$ = ٢٠٠٠

$س_١$، $س_٢$، $س_٣$، $غ_١$، $غ_٢$، $غ_٣$، $ى_١$، $ى_٢$، $ى_٣$ $\leq$ صفر

ويلاحظ في هذا النموذج أن المتغيرات الراكدة ترتبط بمعامل = صفر في دالة الهدف، أما المتغيرات الإصطناعية فإنها ترتبط بمعامل = م في دالة الهدف.

- **<u>إعداد الجدول الأول:</u>**

ويمثل الجدول الأول الحل المبدئى، ونلاحظ هنا أنه وفقاً لهذا الحل: فإن متغيرات القرار $س_١$، $س_٢$، $س_٣$ = صفر، كذلك المتغيرات الراكدة ذات الإشارة السالبة $غ_٢$، $غ_٣$ = صفر؛ أما المتغيرات التي تأخذ قيماً موجبة في الحل الأول فهي: المتغيرات الراكدة ذات الإشارة الموجبة ($غ_١$ = ٣٠٠٠) والمتغيرات

الإصطناعية $ى_1$ = ١٠٠٠٠، $ى_2$ = ١٥٠٠، $ى_3$ = ٢٠٠٠ وعلى ذلك فإن الحل المبدئي الأول يتمثل فى:

$ى_1$ = ١٠.٠٠٠، $غ_1$ = ٣٠٠٠، $ى_2$ = ١٥٠٠، $ى_3$ = ٢٠٠٠ ويظهر الجدول الأول على النحو التالي:

$ت_و$	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	$س_1$	$س_2$	$س_3$	$غ_1$	$غ_2$	$غ_3$
			٨	١٠	١١	صفر	صفر	صفر
م	$ى_1$	١٠,٠٠٠	١	١	١	صفر	صفر	صفر
صفر	$غ_1$	٣٠٠٠	١	صفر	صفر	١	صفر	صفر
م	$ى_2$	١٥٠٠	صفر	(١)	صفر	صفر	ـ١	صفر
م	$ى_3$	٢٠٠٠	صفر	صفر	١	صفر	صفر	ـ١
اختبار المثالية $ص_و$		١٣٥٠٠م	م	ـ ٢م	٢م	صفر	ـ م	ـ م
$ت_و$ ـ $ص_و$			٨ـ م	١٠ـ٢م	١١ـ٢م	صفر	م	م

ويتم إعداد الجدول الأول بنفس طريقة إعداد الجدول الأول للسمبلكس فى حالة تعظيم الأرباح.

- **اختبار المثالية:**

نلاحظ هنا أنه فى حالة وجود قيم سالبة فى صف ($ت_و$ ـ $ص_و$): فإن ذلك يعني إمكانية تخفيض التكاليف عن طريق إدخال متغيرات جديدة؛ ولذلك فإن الحل فى هذه الحالة لا يمثل الحل الأمثل؛ أما إذا كانت عناصر صف ($ت_و$ ـ $ص_و$) = صفراً، أو موجبة: فإن ذلك يعنى عدم وجود إمكانية لتحسين الحل؛ وأن تغيير الحل إما أن يؤدى إلى عدم حدوث أى تغيير فى التكلفة (فى حالة وجود رقم الصفر فى صف) ($ت_و$ ـ $ص_و$)؛أو أن يؤدي إلى زيادة التكلفة (فى حالة وجود قيم موجبة فى هذا الصف)، وعلى ذلك فإنه فى حالة وجود عناصر = صفراً أو عناصر ذات قيم موجبة فى صف ($ت_و$ ـ $ص_و$): فإن الحل فى هذه الحالة يمثل الحل الأمثل.

وبناء على ذلك، فإن الحل وفقا للجدول الأول: لا يمثل الحل الأمثل، بسبب وجود قيم سالبة فى صف ($ت_و$ ـ $ص_و$)؛ ومن ثم فإنه يجب تغيير الحل عن

طريق: إدخال متغيرات جديدة؛ ويتطلب ذلك اختيار المتغير المرشح للدخول فى الحل (العمود الرئيس) واختيار المتغير الذى يتعين إخراجه من الحل (الصف الرئيس).

- **<u>تحسين الحل وإيجاد حل آخر أفضل:</u>**

يتم تحسين الحل وإيجاد حل آخر أفضل وفقا للخطوات التالية:

١- <u>تحديد المتغير المرشح للدخول فى الحل (العمود الرئيس):</u> يلاحظ أنه نظراً لأن الهدف هنا يتمثل في تخفيض التكاليف: لذلك فإنه يتم اختيار العمود الرئيس على أساس العمود الذي يكون له أكبر قيمة سالبة فى صف ($ت_و$ - $ص_و$)؛ و يعني ذلك ضرورة اختيار المتغير الذي يؤدى إلى أكبر تخفيض فى التكاليف؛ ومن ثم فإننا نجد أن العمود الذي له أكبر قيمة سالبة هو: عمود $س_٢$ ؛ ولذلك فإن العمود الرئيس يعتبر هو عمود $س_٢$ ، أي أن المتغير الداخل فى الحل الجديد هو $س_٢$

٢- <u>تحديد المتغير الذى يجب استبعاده من الحل الحالى (الصف الرئيس):</u> وذلك بقسمة عناصر عمود قيم متغيرات الحل ÷ العناصر المقابلة لها فى العمود الرئيس؛ ويتم اختيار الصف ذى أصغر قيمة موجبة، ويتضح ذلك مما يلي:

$$\text{صف } ى_١ = \frac{١٠٠٠٠}{١} = ١٠.٠٠٠$$

$$\text{صف } غ_١ = \frac{٣٠٠٠}{\text{صفر}} = \infty$$

$$\text{صف } ى_٢ = \frac{١٥٠٠}{١} = ١٥٠٠$$

$$\text{صف } ى_٣ = \frac{٢٠٠٠}{\text{صفر}} = \infty$$

وبناء على النتائج السابقة؛ فإننا نختار صف $ى_٢$ ذى أصغر قيمة موجبة كصف رئيس، كما يعتبر المتغير $ى_٢$ هو المتغير المستبعد(أو الخارج من الجدول).

٣- <u>تحديد أو حساب القيم الجديدة لصف $س_٢$ الجديد:</u> وذلك عن طريق: قسمة عناصر الصف المستبعد ÷ عنصر المفتاح؛ ونظراً لأن عنصر المفتاح = (١)، لذلك فإن العناصر ستبقى كما هي؛ ولكن على أن يحل المتغير $س_٢$ بدلاً من

المتغير $ى_{٢}$ فى عمود متغيرات الحل؛ كما يحل معامل $س_{٢}$ فى دالـة الهـدف (١٠) فى عمود $ت_{و}$، بدلاً من معامل $ى_{٢}$ (م)

٤- <u>حسـاب القـيم الجديـدة للصـفوف الأخـرى: وذلـك باسـتخدام المعادلـة التـى سـبق توضيحها في حالة تعظيم الربحية</u>(راجع صفحة ٨٧).

على أن نستمر في نفس الخطوات، بنفس المنهجية التي سبق وأن بيناها في نموذج البرمجة الخطية (تعظيم ربحية)، ولكن آخذين في الاعتبار الفروق القائمة بين نموذج البرمجة (تدنية أو تخفيض تكاليف) وبين نموذج البرمجة (تعظيم ربحية)، وذلك إلى أن نصل إلى الجدول الخامس، والذي يمثل الحل الأمثل لهذه المشكلة:

$ت_{و}$	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	٨	١٠	١١	صفر	صفر	صفر
			$س_{١}$	$س_{٢}$	$س_{٣}$	$غ_{١}$	$غ_{٢}$	$غ_{٣}$
صفر	$غ_{٢}$	٣٥٠٠	صفر	صفر	صفر	-١	١	١
٨	$س_{١}$	٣٠٠٠	١	صفر	صفر	١	صفر	صفر
١٠	$س_{٢}$	٥٠٠٠	صفر	١	صفر	-١	صفر	١
١١	$س_{٣}$	٢٠٠٠	صفر	صفر	١	صفر	صفر	-١
اختبار المثالية								
$ص_{و}$		٩٦,٠٠٠	٨	١٠	١١	-٢	صفر	-١
$ت_{و} - ص_{و}$			صفر	صفر	صفر	+٢	صفر	+١

الجدول الخامس

ويلاحظ من الجدول الخامس عدم وجود أية قيم سالبة فى صف ($ت_{و} - ص_{و}$)، ويعنى ذلك عدم وجود أية إمكانية أخرى لتخفيض التكاليف، الأمر الذي يعني أن الحل وفقاً لهذا الجدول، يتضمن تحقيق أدنى تكلفة ممكنة، أى أن الحل وفقاً للجدول الخامس يمثل الحل الأمثل؛ والذي يتمثل في:

$س_{١}$ = ٣٠٠٠

$س_{٢}$ = ٥٠٠٠

$س_{٣}$ = ٢٠٠٠

الفصل السادس
المشكلة الثنائية (المشكلة المقابلة)
في البرمجة الخطية
(Dual Problem)

تعتبر نظرية الثنائية أو المقابلة، واحدة من أكثر المفاهيم أهمية في البرمجة الخطية، حيث يلاحظ أن الفكرة الرئيسة وراء نظرية الثنائية تكمن في أن: كل مشكلة من مشاكل البرمجة الخطية لها برنامج خطي يصحبها يطلق عليه: "ثنائيتها، أو المشكلة الثنائية، أو المشكلة المقابلة"؛ بمعنى أن حل البرنامج الخطي الأصلي، يتيح أو يوفر لنا حلاً للبرنامج الخطي الثنائي أيضاً، الأمر الذي يعني أنه عندما يتم حل مشكلة خطية بطريقة السمبلكس، فإننا نكون قد توصلنا إلى حل اثنتين من مشاكل البرمجة الخطية (حل للمشكلة الأصلية – والتي قد تكون تعظيم ربحية أو تدنية تكاليف – وحل للمشكلة المقابلة أو الثنائية – وهي تدنية التكاليف: إذا كانت المشكلة الأصلية هي مشكلة تعظيم؛ أو أنها تعظيم ربحية: وذلك إذا كانت المشكلة الأصلية هي مشكلة تدنية تكاليف.

بكلمات أخرى، فإنه إذا كان أمامنا مشكلة برمجة خطية تهدف إلى تعظيم الربحية، فإن هذه المشكلة يطلق عليها:" النموذج الأصلي"، ويصحب هذه المشكلة دائماً مشكلة أخرى تهدف إلى تدنية التكاليف، يطلق عليها:" النموذج الثنائي"؛ أما إذا كان أمامنا مشكلة برمجة خطية تهدف إلى تدنية التكاليف، فإن هذه المشكلة يطلق عليها:" النموذج الأصلي"، ويصحب هذه المشكلة دائماً مشكلة أخرى تهدف إلى تعظيم الربحية يطلق عليها:" النموذج الثنائي".

هذا، وتجدر الإشارة إلى أنه من الأمور المنطقية، أن ترتبط الأرباح بالتكاليف: ذلك أن الأرباح – وكما هو معلوم إنما تمثل الفرق بين الإيرادات والتكاليف؛ وأنه كلما انخفضت التكاليف زادت الأرباح – الأمر الذي يعني أن

هناك دائماً علاقة ارتباط بين المخرجات والمدخلات، حيث نجد في مشاكل تعظيم الربحية، أن الاهتمام يتركز أو ينصب على اختيار مزيج الإنتاج الأمثل (أي المخرجات)، بينما نجد في مشاكل تدنية التكاليف، أن الاهتمام ينصب على تخفيض التكاليف عن طريق حساب تكلفة الموارد أو تكلفة الطاقة أو حساب أسعار الظل (أي المدخلات).

ويمكننا أن نفسر المشكلة الثنائية من الوجهة الاقتصادية، بأنه إذا كان النموذج الأصلي يهدف إلى تعظيم الربحية، في ضوء مجموعة من الموارد المحدودة أو المدخلات؛ فإننا نلاحظ في الوقت نفسه، أنه لا يمكن تحقيق الأرباح بدون تلك المدخلات؛ وهو الأمر الذي يعني وجوب أن نأخذ في الاعتبار عند حساب الأرباح المحققة: تكلفة الموارد المحدودة التي ساهمت في تحقيق الأرباح، وهو الأمر الذي يستلزم ضرورة حساب سعر ظل كل مورد من الموارد، للتأكد من أن مجموعة أسعار ظل الموارد لا تزيد عن إجمالي الأرباح المحققة.

ومن هنا، فإنه يمكن تفسير الحل الثنائي الأمثل علي أنه السعر الذي يتم دفعه ثمناً للموارد المقيدة، ومن ثم فإن قيمة دالة الهدف لكل من النموذجين: الأصلي والثنائي دائماً ما نجدهما متساويين؛ وتفيد هذه العلاقة في: التعرف علي خصائص الحل الأمثل للنموذج الخطي؛ وفي اختبار حساسية الحل الأمثل، أو في التأكد من أن الحل الممكن للمشكلة يعتبر حلا أمثلاً.

هذا، ويمكن صياغة النموذج الثنائي، من نموذج البرمجة الخطية الأصلي، وكذلك العكس بالعكس؛ وذلك من خلال مراعاة المحاور الآتية:

١. إذا كانت المشكلة الأصلية القائمة لدينا، تهدف إلى تعظيم دالة هدف ربحية: فإن النموذج المقابل أو الثنائي له، يهدف إلى تدنية دالة تكاليف؛ والعكس بالعكس صحيح.

٢. يتم أخذ قيم الطرف الأيسر لقيود النموذج الأصلي، لتصبح: معاملات دالة هدف النموذج الثنائي؛ كما يتم أخذ معاملات دالة هدف النوذج الأصلي، لتصبح: قيم الطرف الأيسر لقيود النموذج الثنائي.

٣. يلاحظ أن عدد قيود النموذج الثنائي = عدد متغيرات النموذج الأصلي؛الأمر الذي يعني أن كل متغير من متغيرات النموذج الأصلي، يقابله قيد في النموذج الثنائي.

٤. يتم استخدام متغيرات جديدة في النموذج الثنائي، بحيث يتم استخدام متغير في النموذج الثنائي مقابل كل قيد من قيود النموذج الأصلي؛ فإذا كان كل قيد في النموذج الأصلي يرتبط بمتغير راكد، فإن ذلك يعني أن كل متغير راكد في النموذج الأصلي يرتبط بمتغير من المتغيرات الجديدة في النموذج الثنائي.

٥. يلاحظ أنه إذا كان عدد المتغيرات في النموذج الأصلي = (ن) ، وعدد القيود = (ق)؛ فإن النموذج الثنائي يجب أن يشتمل على عدد من المتغيرات قدره (ق)، وكذلك على عدد من القيود قدره (ن)؛ وذلك مع ضرورة مراعاة أن شرط عدم السالبية لا يعتبر قيد يدخل ضمن العدد (ق)، بمعنى أننا حينما نطبق هذه القاعدةك فإننا لا نأخذ شرط عدم السالبية في الاعتبار كأحد قيود النموذج الأصلي.

٦. يلاحظ بالنسبة لمعاملات القيود الأصلية، والتي تظهر أمامنا بدءاً من اليمين إلى اليسار؛ هي نفسها في النموذج الثنائي؛ ولكن بعد تحويرها: بجعل الصفوف أعمدة، والأعمدة صفوف.

٧. يجب مراعاة أنه إذا كانت إشارة قيود النموذج الأصلي في صورة ≥ : فإن إشارة النموذج الثنائي له يتم عكسها لتصبح ≤؛ والعكس بالعكس. غير أنه يجب ملاحظة أن هذا الأمر لا ينطبق على شرط عدم السالبية، حيث أنه من الواجب دائماً في مشاكل البرمجة الخطية بنوعيها (التعظيم، والتدنية) أن تكون كافة متغيرات النموذجين: الأصلي، والثنائي، محققة لشرط عدم السالبية، بمعنى أن تكون≥ الصفر.

٨. ومن جهة أخرى، فإنه يجب مراعاة أن القيمة المثلى لدالة الهدف في النموذج الأصلي = القيمة المثلى لدالة الهدف في النموذج الثنائي.

وبكلمات موجزة، فإن أهم القواعد الواجب إتباعها لإعداد النموذج الثنائي (أو المقابل)، تتلخص في:

يتم تكوين صياغة النموذج الثنائي من واقع صياغة النموذج الأصلى، حيث تتكون صياغة النموذج الثنائي من:

١- دالة الهدف. ٢- القيود. ٣- شرط عدم السالبية.

١- دالة الهدف:

- **إذا كان النموذج الأصلي تعظيم: يصبح النموذج الثنائي تدنية والعكس بالعكس صحيح.**
- **متغيرات النموذج الثنائي يرمز لها بالرمز "ص"؛ كما أن عدد متغيرات النموذج الثنائي = عدد قيود النموذج الأصلي.**
- **معاملات دالة الهدف في النموذج الثنائي هي نفسها قيم الطرف الأيسر لقيود النموذج الأصلي.**

٢- القيود:

- **عدد قيود النموذج الثنائي= عدد متغيرات النموذج الأصلي.**
- **إشارات قيود النموذج الثنائي: تكون عكس إشارات قيود النموذج الأصلى:**

فإذا كانت الإشارة ≥ في النموذج الأصلي: فإنها تصبح ≤ في النموذج الثنائى.

أما إذا كانت الإشارة ≤ في النموذج الأصلي: فإنها تصبح ≥ في النموذج الثنائى.

- **قيم الطرف الأيسر لقيود النموذج الثنائي: هي معاملات دالة الهدف في النموذج الأصلى.**
- **قيم الطرف الأيمن لقيود النموذج الثنائي: يتم استخدامها هي نفسها كقيم للطرف الأيمن من قيود النموذج الأصلي (ولكن بعد أن يتم تبديل الصفوف مكان الأعمدة، والأعمدة مكان الصفوف).**

٣- شرط عدم السالبية:

- **لا يختلف في النموذج الثنائي، عن النموذج الأصلي، سوى في الرموز "ص" بدلاً من "س" كما لا تطبق عليه قاعدة الإشارات السابقة.**

- **<u>مثال على كيفية صياغة النموذج الثنائي:</u>**

إذا علمت أن نموذج البرمجة الخطية يتمثل في:

تعظيم أرباح = ٢٤٠ س$_١$ + ٣٦٠ س$_٢$ + ٤٨٠ س$_٣$

طبقا للقيود الآتية:

٣ س$_١$ + ٤ س$_٢$ + ٢ س$_٣$ ≥ ٦٠٠

٢ س$_١$ + س$_٢$ + ٢ س$_٣$ ≥ ٩٠٠

١ س$_١$ + ٣ س$_٢$ + ٢ س$_٣$ ≥ ١٢٠٠

وذلك طبقا لشرط عدم السلبية:

س$_١$ ؛ س$_٢$ ؛ س$_٣$ ≤ صفر

فإذا كان النموذج السابق يطلق عليه <u>النموذج الأصلي</u>، فإن <u>النموذج الثنائي</u> له يظهر على النحو الآتي:

تدنية تكاليف: ٦٠٠ ص$_١$ + ٩٠٠ ص$_٢$ + ١٢٠٠ ص$_٣$

طبقا للقيود الآتية:

٣ ص$_١$ + ٢ ص$_٢$ + ص$_٣$ ≤ ٢٤٠

٤ ص$_١$ + ص$_٢$ + ٣ص$_٣$ ≤ ٣٦٠

٢ ص$_١$ + ٢ ص$_٢$ + ٢ ص$_٣$ ≤ ٤٨٠

وذلك طبقاً لشرط عدم السالبية:

ص$_١$ + ص$_٢$ + ص$_٣$ ≤ صفر

- **<u>العلاقات بين النموذج الأصلي والنموذج الثنائي:</u>**

<u>بمقارنة النموذجين الأصلي والثنائي نلاحظ العلاقات التالية:</u>

١- معاملات دالة الهدف في النموذج الأصلي: أصبحت ثوابت الجانب الأيسر في النموذج الثنائي؛ وبالمثل فإن: ثوابت الجانب الأيسر في النموذج الأصلي: أصبحت معاملات التكلفة في النموذج الثنائي.

٢- تم تعديل المتباينات من النوع " أصغر من أو يساوي ≥ ": إلى متباينات من النوع " أكبر من أو يساوي ≤ ".

٣- تم تحوير الهدف: من تعظيم أرباح في النموذج الأصلي، إلى تدنية التكاليف في النموذج الثنائي.

٤- كل عمود في النموذج الأصلي: يناظره صف للقيود في النموذج الثنائي؛ وبالتالي فإن عدد قيود النموذج الثنائي يساوي عدد متغيرات النموذج الأصلي.

٥- كل قيد أي صف في النموذج الأصلي: يناظره عمود في النموذج الثنائي؛ وبالتالي فإن هناك متغير ثنائي واحد لكل قيد في النموذج الأصلي.

٦- وأخيراً فإنه يلاحظ أن: ثنائي النمــــــوذج الثنائي يتمثل في: النموذج الأصلي نفسه.

٧-<u>لكي يمكن تحويل النموذج الأصلي للبرمجة الخطية، إلى نموذج ثنائي (مقابل)، فإنه يجب توافر مجموعة من الشروط؛ وتتمثل في الآتي:</u>

أ- <u>يجب أن تكون جميع قيود المشكلة، في صورة متباينات</u>؛ فإذا كان من بين قيود المشكلة معادلة: فإنه يتم تحويلها إلى متباينة كما يلي:

$$٣ س_{١} + ٤ س_{٢} + ٢ س_{٣} = ٦٠٠$$

فإنه يتم تحويلها إلى متباينة، كما يلي:

$$٣ س_{١} + ٤ س_{٢} + ٢ س_{٣} \geq ٦٠٠$$

$$\text{أو } ٣ س_{١} + ٤ س_{٢} + ٢ س_{٣} \leq ٦٠٠$$

ب- كما يجب توحيد اتجاه المتباينات، عن طريق ضرب إحداهم في رقم ثابت (ــ ١)؛ وعلى ذلك يمكن تعديل اتجاه المتباينة الثانية، عن طريق ضربها × (ــ ١)، وذلك على النحو الآتي:

$$-٣ س_{١} - ٤ س_{٢} - ٢ س_{٣} \geq ٦٠٠$$

ج- من الواجب أن تكون جميع المتباينات في اتجاه واحد، بمعنى أن تكون كلها من النوع (≥)، أو أن تكون جميعها من النوع (≤).

د- فإذا توافرت الشروط السابقة في أية مشكلة أصلية: فإنه يمكن تحويلها إلى مشكلة ثنائية أو مقابلة، ويمكن توضيح كيفية تحويل المشكلة الأصلية، إلى مشكلة ثنائية أو مقابلة ،من خلال المثال الآتي:

مثال (١):

بفرض أن قدم إليك نموذج البرمجة الخطية التالي:

تعظيم أرباح = ٣٠٠ $س_{١}$ + ٦٠٠ $س_{٢}$ + ٩٠٠ $س_{٣}$

طبقا للقيود الآتية:

٣ $س_{١}$ + ٤ $س_{٢}$ + ٥ $س_{٣}$ ≥ ٦٠

٢ $س_{١}$ + $س_{٢}$ + ٢ $س_{٣}$ ≥ ٤٠

٦ $س_{١}$ + ٧ $س_{٢}$ + ٨ $س_{٣}$ ≥ ٨٠

وطبقا لشرط عدم السلبية فإن:

$س_{١}$ + $س_{٢}$ + $س_{٣}$ ≤ صفر

فإذا كان النموذج السابق يطلق عليه <u>النموذج الأصلي</u> ، فإن <u>النموذج الثنائي</u> له يظهر كالآتي:

تخفيض تكاليف: ٦٠ $ص_{١}$ + ٤٠ $ص_{٢}$ + ٨٠ $ص_{٣}$

طبقا للقيود الآتية:

٣ $ص_{١}$ + ٢ $ص_{٢}$ + ٦ $ص_{٣}$ ≤ ٣٠٠

٤ $ص_{١}$ + $ص_{٢}$ + ٧ $ص_{٣}$ ≤ ٦٠٠

٥ $ص_{١}$ + ٢ $ص_{٢}$ + ٨ $ص_{٣}$ ≤ ٩٠٠

وطبقا لشرط عدم السلبية فإن:

$ص_{١}$ ؛ $ص_{٢}$ ؛ $ص_{٣}$ ≤ صفر

<u>مثال (٢):</u>

تنتج إحدى المنشآت الصناعية منتجين: أ ، ب ، وذلك من خلال ٣ مراحل إنتاجية. وقد تم صياغة نموذج البرمجة الخطية الأصلي للمشكلة على النحو الآتي:

المطلوب تعظيم الدالة ر = ٦ $س_{١}$ + ١٠ $س_{٢}$

وذلك في ظل القيود الآتية:

٦ $س_{١}$ + ٤ $س_{٢}$ ≥ ٣٦

٢ $س_{١}$ ≥ ٨

٢ $س_{٢}$ ≥ ١٢

وذلك بشرط أن: $س_{١}$ ؛ $س_{٢}$ ≤ صفر

أولاً: حل المشكلة الأصلية:

من خلال اتباع قواعد نموذج البرمجة الخطية تعظيم ربحية، فإنه يمكن إعداد جدول السمبلكس الأول على النحو الآتي:

رو			٦	١٠	صفر	صفر	صفر
	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	س١	س٢	غ١	غ٢	غ٣
صفر	غ١	٣٦	٦	٤	١	صفر	صفر
صفر	غ٢	٨	٢	صفر	صفر	١	صفر
صفر	غ٣	١٢	صفر	٢	صفر	صفر	١
اختبار المثالية ص و		صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
رو – ص و			٦	١٠	صفر	صفر	صفر

وباتباع خطوات حل نموذج البرمجة الخطية، بتطبيق القواعد التي سبق بيانها في قواعد تطبيق طريقة السمبلكس لتعظيم الربحية: فإننا يمكننا الوصول إلى جدول السمبلكس الأمثل الآتي:

رو			٦	١٠	صفر	صفر	صفر
	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	س١	س٢	غ١	غ٢	غ٣
٦	س١	٢	١	صفر	$\frac{1}{6}$	صفر	$-\frac{1}{3}$
صفر	غ٢	٤	صفر	صفر	$-\frac{1}{3}$	١	$\frac{2}{3}$
١٠	س٢	٦	صفر	١	صفر	صفر	$\frac{1}{2}$
اختبار المثالية ص و		٧٢	٦	١٠	١	صفر	٣
رو – ص و			صفر	صفر	١-	صفر	٣-

ويلاحظ علي جدول السمبلكس الأمثل السابق الملاحظات التالية:

١- الحل يعتبر حلاً أمثلاً: وذلك لأن معاملات كل المتغيرات في صـــف (ر$_{و}$ – ص$_{و}$): صفرية أو سالبة.

٢- يتحدد مزيج الإنتاج الأمثل كالآتي:

س$_{١}$ = ٢ وحدة، س$_{٢}$ = ٦ وحدات، كما أن أقصى ربـح = ٧٢ جنيهاً.

٣- هناك طاقة عاطلة فائضة في المورد الثاني يمثلها المتغير الراكد غ$_{٢}$ وقدرها ٤ ساعات.

٤- أسعار ظل الموارد تتحدد على النحو الآتي:

أ- المـورد الأول له سـعر ظـل = ١ جنيهاً واحداً، وطاقته مستغلة بالكامل.

ب- المـورد الثالث له سعر ظل = ٣ جنيهات، وطاقته مستغلة بالكامل.

ج- المورد الثاني له سعر ظل = صفر، لأن به طاقة عاطلة قدرها ٤ ساعات.

- **<u>حل المشكلة الثنائية (المقابلة):</u>**

يمكن تحويل المشكلة الأصلية، إلى مشكلة مقابلة، على النحو الآتي:

المطلوب تدنية الدالة:

ت = ٣٦ ص$_{١}$ + ٨ ص$_{٢}$ + ١٢ ص$_{٣}$

وذلك طبقا للقيود الآتية:

٦ ص$_{١}$ + ٢ ص$_{٢}$ ≤ ٦

٤ ص$_{١}$ + ٢ص$_{٣}$ ≤ ١٠

وطبقا لشرط عدم السلبية فإن:

ص$_{١}$ ؛ ص$_{٢}$ ؛ ص$_{٣}$ ≤ صفر

***ويظهر الحل الأمثل للنموذج الثنائي الذي يهدف إلى تخفيض أو تدنية* التكاليف كالآتي:**

تو			٣٦	٨	١٢	صفر	صفر
	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	ص١	ص٢	ص٣	غ١	غ٢
٣٦	ص١	١	١	$\frac{1}{3}$	صفر	$\frac{-1}{6}$	صفر
١٢	ص٣	٣	صفر	$\frac{-2}{3}$	١	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{2}$
اختبار المثالية ص و		٧٢	٣٦	٤	١٢	ـ٢	ـ٦
تو ـ ص و			صفر	٤	صفر	٢	٦

ويلاحظ علي جدول السمبلكس الأمثل السابق أنه يمثل الحل الأمثل، وذلك لأن معاملات كل المتغيرات في صف (تو ـ ص و) : صفرية أو موجبة.

- **مطابقة الحلول والتحقق:**

١- قيمة دالة الهدف في النموذج الأصلي لتعظيم الأرباح: هي نفسها قيمة دالة الهدف في النموذج الثنائي لتدنية (تخفيض) التكاليف؛ وتحسب كالآتي:

تعظيم أرباح	تخفيض تكاليف
٦ س١ + ١٠ س٢	٣٦ ص١ + ٨ ص٢ + ١٢ ص٣ =
= ٦ × ٢ + ١٠ × ٦	=٣٦× ١+ ٨ × صفر+ ١٢ × ٣=
= ٧٢	=٧٢

٢- معاملات المتغيرات الراكدة في صف (رو ــ ص و) في جدول السمبلكس الأصلي لتعظيم الأرباح: تمثل القيم المثلى للمتغيرات الثنائية ــ أسعار ظل الموارد : ص١، ص٢، ص٣ حيث أن:

غ١ = ص١ = ١

غ٢ = ص٢ = صفر

غ٣ = ص٣ = ٣

٣- معاملات المتغيرات الأصلية س١، س٢، في صف (رو ــ ص و) في جدول السمبلكس الأصلي لتعظيم الأرباح: تمثل قيم المتغيرات الراكدة في النموذج الثنائي لتخفيض التكاليف حيث أن:

$س_{١} = غ_{١} =$ صفر

$س_{٢} = غ_{٢} =$ صفر

٤- معاملات المتغيرات الأصلية $س_{١}$، $س_{٢}$، في صف ($ر_{و} - ص_{و}$) في جدول السمبلكس الأصلي لتعظيم الأرباح: تمثل الفرق بين الجانب الأيمن – الذي يمثل التكاليف – والجانب الأيسر الذي يمثل الأرباح – لمعاملات القيود في النموذج الثنائي؛ ويظهر ذلك كما يلي:

$٦ ص_{١} + ٢ ص_{٢} \geq ٦$

٦ × ١ + ٢ × صفر = ٦

الفرق بين كلا الجانبين = ٦ – ٦ = صفر وهو= معامل $س_{١}$

$٤ ص_{١} + ٢ص_{٣} \geq ١٠$

٤× ١ + ٢ × ٣ = ١٠

الفرق بين كلا الجانبين = ١٠ – ١٠ = صفر وهو = معامل $س_{٢}$

٥- معاملات المتغيرات الراكدة $غ_{١}$، $غ_{٢}$، كما تظهر في جدول السمبلكس الأمثل الثنائي لتخفيض التكاليف: تمثل القيم المثلى للمتغيرات الأساسية $س_{١}$، $س_{٢}$، $س_{٣}$ كما تظهر في جدول السمبلكس الأمثل الأصلي لتعظيم الأرباح.

$غ_{١} = س_{١} = ٢$

$غ_{٢} = س_{٢} = ٦$

٦- معاملات المتغيرات الأصلية $ص_{١}$، $ص_{٢}$، $ص_{٣}$ (والتي تظهر في جدول السمبلكس الأمثل الثنائي لتخفيض التكاليف): تمثل قيمة المتغيرات الراكدة $غ_{١}$، $غ_{٢}$، $غ_{٣}$ (والتي تظهر في جدول السمبلكس الأمثل الأصلي لتعظيم الأرباح)؛ حيث أن:

$ص_{١} = غ_{١} =$ صفر

$ص_{٢} = غ_{٢} = ٤$

$ص_{٣} = غ_{٣} =$ صفر

<u>مثال (٣):</u>

قدم إليك نموذج البرمجة الخطية الأصلي التالي:

المطلوب تدنية التكاليف = $٦ ص_{١} + ٣ ص_{٢} + ٤ ص_{٣}$

وذلك طبقا للقيود الآتية:

$ص_١ \leq ٣٠$

$ص_٢ \leq ٥٠$

$ص_٣ \leq ٢٠$

$ص_١ + ص_٢ + ص_٣ = ١٢٠$

والمطلوب:

١- التوصل إلى الحل الأمثل للنموذج السابق.

٢- صياغة النموذج الثنائي له.

٣- مطابقة الحلول بين النموذجين الأصلي والثنائي.

١- يظهر جدول السمبلكس الأمثل الأصلي للنموذج السابق لتخفيض التكاليف كالآتي:

$ت_و$	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	$ص_١$	$ص_٢$	$ص_٣$	$غ_١$	$غ_٢$	$غ_٣$
			٦	٣	٤	صفر	صفر	صفر
٦	$ص_١$	٣٠	١	صفر	صفر	١-	صفر	صفر
٣	$ص_٢$	٧٠	صفر	١	صفر	١	صفر	١
٤	$ص_٣$	٢٠	صفر	صفر	١	صفر	صفر	١-
صفر	$غ_٢$	٢٠	صفر	صفر	صفر	١	١	١
اختبار المثالية $ص_و$		٤٧٠	٦	٣	٤	٣-	صفر	١-
$ت_و - ص_و$			صفر	صفر	صفر	٣	صفر	١

٢- صياغة النموذج الثنائي:

تعظيم أرباح = $٣٠ س_١ + ٥٠ س_٢ + ٢٠ س_٣ + ١٢٠ س_٤$

طبقا للقيود الآتية:

$س_١ + س_٤ \geq ٦$

$س_٢ + س_٤ \geq ٣$

$س_٣ + س_٤ \geq ٤$

وطبقا لشرط عدم السالبية:

$س_١؛ س_٢؛ س_٣؛ س_٤ \geq صفر$

ويظهر الحل الأمثل للنموذج الثنائي لتعظيم الأرباح كالآتي:

رو	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	س١	س٢	س٣	س٤	غ١	غ٢	غ٣
			٣٠	٥٠	٢٠	١٢٠	صفر	صفر	صفر
٣٠	س١	٣	١	-١	صفر	صفر	١	-١	صفر
١٢٠	س٤	٣	صفر	١	صفر	١	صفر	١	صفر
٢٠	س٣	١	صفر	-١	١	صفر	صفر	-١	١
اختبار المثالية ص و		٤٧٠	٣٠	٧٠	٢٠	١٢٠	٣٠	٧٠	٢٠
رو – ص و			صفر	-٢٠	صفر	صفر	-٣٠	-٧٠	-٢٠

وهنا يجب ملاحظة أن المطابقة وتحقيق النتائج تتم من نموذج تعظيم الأرباح سواءً أكان اصلياً أو ثنائياً إلى نموذج تخفيض التكاليف؛ كما يلاحظ أيضاً أن المطابقة السادسة السابق ذكرها لن تتحقق هنا بسبب أن متباينات النموذج الأصلى لتخفيض التكاليف ليست كلها من النوع أكبر من أو يساوى، بل يتضمن النموذج متباينة فى شكل متساوية، وبالتالي يمكن إجراء خمس مطابقات فقط وذلك كما يتبين مما يلي:

١- قيمة دالة الهدف في النموذج الأصلي هي نفسها قيمة دالة الهدف في النموذج الثنائي وتحسب كالآتي:

تعظيم أرباح

٣٠ س١ + ٥٠ س٢ + ٢٠ س٣ + ١٢٠ س٤

٣٠(٣) + صفر + ٢٠ (١) + ١٢٠(٣) =٤٧٠ جنيها

تخفيض تكاليف

٦ص١ +٣ص٢ +٤ص٣

= ٦(٣٠) + ٣(٧٠)+٤(٢٠) = ٤٧٠جنيها

٢- معاملات المتغيرات الراكدة غ١، غ٢، غ٣، في النموذج الثنائي لتعظيم الأرباح: تمثل القيم للمتغيرات الأصلية – أسعار الظل – في النموذج الأصلي لتخفيض التكاليف.

غ١ = ص١ = ٣٠

غ٢ = ص٢ = ٧٠

غ٣ = ص٣ = ٢٠

٣- معاملات المتغيرات الأصلية س$_{١}$، س$_{٢}$، س$_{٣}$، كما تظهر في صف التقييم النهائي في جدول السمبلكس الثنائي لتعظيم الأرباح: تمثل قيم المتغيرات الراكدة في النموذج الأصلي لتخفيض التكاليف:

س$_{١}$ = غ$_{١}$ = صفر

س$_{٢}$ = غ$_{٢}$ = ٢٠

س$_{٣}$ = غ$_{٣}$ = صفر

٤- معاملات المتغيرات الأصلية س$_{١}$، س$_{٢}$، س$_{٣}$، س$_{٤}$ كما تظهر في صف (ر$_{و}$ - ص$_{و}$) في جدول السمبلكس الثنائي لتعظيم الأرباح هي الفرق بين الجانب الأيمن – التكاليف – والجانب الأيسر – الأرباح – لمعاملات القيود في النموذج الأصلي لتخفيض التكاليف.

حيث يظهر كالآتي:

ص$_{١}$ $\geq$ ٣٠

٣٠ - ٣٠ = صفر معامل س$_{١}$

ص$_{٢}$ $\geq$ ٥٠

٧٠ – ٥٠ = ٢٠ معامل س$_{٢}$

ص$_{٣}$ $\geq$ ٢٠

٢٠ – ٢٠ = صفر معامل س$_{٣}$

ص$_{١}$ + ص$_{٢}$ + ص$_{٣}$ =١٢٠

١(٣٠) + ١(٧٠) + ١٠٢٠) =١٢٠

١٢٠-١٢٠ = صفر معامل س$_{٤}$

٥- معاملات المتغيرات الراكدة غ$_{١}$، غ$_{٢}$، غ$_{٣}$ كما تظهر في صف (ر$_{و}$ – ص$_{و}$) في جدول السمبلكس الأمثل لتخفيض التكاليف: تمثل القيم المثلي للمتغيرات الأساسية س$_{١}$، س$_{٢}$، س$_{٣}$ كما تظهر في صف (ر$_{و}$ – ص$_{و}$) في جدول السمبلكس الأمثل لتعظيم الأرباح حيث أن:

ص$_{٤}$ = س$_{١}$ = ٣

ص$_{٥}$ = س$_{٢}$ = صفر

ص$_{٦}$ = س$_{٣}$ =١

الفصل السابع
تحليل حساسية نموذج البرمجة الخطية
Sensitivity Analysis in Linear Programming

- **<u>مفهوم تحليل الحساسية:</u>**

يبين لنا إطار البرمجة الخطية، أن الحل الأمثل الذي يتم التوصل إليه من خلال طريقة السمبلكس، في كافة نماذج البرمجة الخطية، إنما يعتمد على الله تعالى، ثم على قيم معاملات المتغيرات المختلفة التي يتكون منها نموذج البرمجة الخطية؛ ذلك أن معاملات دالة الهدف Objective Function Coefficients، ومعاملات القيود الفنية Technical Coefficients، والثوابت constants التي تمثل حدود الطاقة المتاحة، تعتبر بمثابة مدخلات البيانات أو معلمات Parameters نموذج البرمجة الخطية.

هذا وتجدر الإشارة إلى أن الحل العملي لأية مشكلة برمجة خطية: لا يعتبر حلاً كاملاً بمجرد التوصل إلى الحل الأمثل؛ ذلك أن حدوث أي تغيير في قيم المعاملات أو في مدخلات البيانات: من شأنه أن يعمل على تغيير مشكلة البرمجة الخطية، ومن ثم فإنه بدون شك سيؤثر علي الحل الأمثل للمشكلة.

<u>ويقصد بتحليل الحساسية: القيام بعملية تحليل كمي، بهدف البحث عن إجابة سؤال يدور مضمونه حول: "ماذا يحدث لو حدث تغير في قيمة كل أو بعض معاملات المتغيرات الداخلة في تركيب النموذج الخطي"</u>، وهو بذلك يعتبر وسيلة هامة للتأكد من مدى مثالية هذا الحل؟ وهل مازال يعتبر حلاً أمثلاً بعد حدوث التغيرات في قيم المعاملات، أم لا؟ وهل لا يزال يحقق كافة القيود الموضوعة؟ وهل سيظل يمثل الحل الأمثل للفترة المستقبلية؟

الواقع أن تحليل حساسية نموذج البرمجة الخطية، يوفر إجابات محددة ودقيقة عن كل هذه التساؤلات؛ وذلك من خلال استخدام قواعد محددة يتم

تطبيقها بدون الحاجة إلى إعادة حل النموذج كله، وذلك لكي يمكن الاستفادة من هذا النموذج في مجالات عديدة لاتخاذ القرارات الإدارية.

هذا، ويلاحظ أن أهمية تحليل الحساسية ترجع إلى الأسباب الآتية:

أولاً: تحديد مدي استجابة الحل الأمثل الذي تم التوصل إليه، للتغييرات التي قد يتم إدخالها على قيم المعاملات المتعلقة بهذا الحل.

ثانياً: تحليل ودراسة مدى تأثيرات التغييرات في معاملات النموذج على الحل المثل، والاستفادة من هذه التغييرات في اتخاذ القرارات؛ فعلى سبيل المثال: إذا تبين لنا أن الحل الأمثل (الربح أو التكلفة) قد تغير تغييراً ملحوظاً في صالح المنشأة، بسبب تغيير طفيف في المعاملات المعطاة، فإن هذا الأمر قد يستحق الأخذ بهذه التغيرات عند اتخاذ القرارات؛ بحيث أنه إذا ساهمت زيادة الطاقة المتاحة من العمل مثلاً عن طريق وقت عمل إضافي، في تعظيم العائد مقارناً بالتكلفة الزائدة للعمل الإضافي، فإنه يكون من الأفضل في هذه الحالة القيام باتخاذ قرار بالسماح بوقت إنتاج إضافي.

ثالثاً: إمكانية التوصل إلي تقديرات دقيقة لمعاملات (معلمات) نموذج البرمجة الخطية، حيث أن تحديد المعاملات التي تؤثر أكثر من غيرها على قيمة دالة الهدف: من شأنه إتاحة إمكانية التوصل إلى أفضل التقديرات لهذه المعلمات، وذلك بشكل يساهم في زيادة درجة الثقة في نموذج البرمجة الخطية، وفي الحل المستخرج منه.

هذا، ويلاحظ أن تحليل حساسية نموذج البرمجة الخطية؛ يركز علي التغييرات في المدخلات الآتية:

١- التغييرات في معاملات دالة الهدف (ب ر).

٢- التغييرات في الثوابت التي تمثل الطاقة المتاحة (ح ر).

٣- التغييرات في مصفوفة القيود أو المعاملات (أ ل ر)، والتي قد ترجع إلى:

(أ) إضافة متغير جديد.

(ب) إحداث تغيير في الأعمدة الموجودة.

(جـ) إضافة قيود جديدة للموارد المتاحة.

هذا ويمكن أن نتفهم أساسيات وكيفية تطبيق تحليل الحساسية، وكيفية معالجة التغييرات السابقة من خلال المثال التطبيقي الآتي:

مثال (١):

تنتج إحدي المنشآت الصناعية ثلاثة منتجات: س، ص، ع، ويبلغ هامش مساهمة الوحدة من كل منتج ٢ جنيهاً؛ ٣جنيهات؛ ١ جنيهاً واحداً؛ علي التوالي؛ كما تحتاج هذه المنتجات إلى نوعين من الموارد، هما: العمل المياشر؛ والمواد الخام؛ وقد قام قطاع بحوث العمليات في المنشأة بصياغة نموذج البرمجة الخطية التالي، لتحديد مزيج الإنتاج الأمثل. المطلوب تعظيم أرباح: ٢س_1 + ٣س_2 + ١س_3

وذلك طبقا للقيود الآتية:

$\frac{1}{3}$ س_1 + $\frac{1}{3}$ س_2 + $\frac{1}{3}$ س_3 ≥ ١ **(العمل المباشر).**

$\frac{1}{3}$ س_1 + $\frac{4}{3}$ س_2 + $\frac{7}{3}$ س_3 ≥ ٣ **(المواد الخام).**

وذلك طبقا لشرط عدم السالبية، حيث أن:

س_1؛ س_2؛ س_3 ≤ صفر.

ويظهر جدول السمبلكس المبدئي؛ على النحو الآتي:

رو			٢	٣	١	صفر	صفر
	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	س_1	س_2	س_3	غ_1	غ_2
صفر	غ_1	١	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	١	صفر
صفر	غ_2	٣	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{3}$	صفر	١
اختبار المثالية ص و		صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
رو – ص و			٢	٣	١	صفر	صفر

ومن خلال تطبيق القواعد التي سبق بيانها لطريقة السمبلكس (تعظيم ربحية)، فقد ظهر جدول الحل الأمثل على النحو الآتى:

$ر_{و}$			٢	٣	١	صفر	صفر
	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	$س_{١}$	$س_{٢}$	$س_{٣}$	$غ_{١}$	$غ_{٢}$
٢	$س_{١}$	١	١	صفر	ـ١	٤	ـ١
٣	$س_{٢}$	٢	صفر	١	٢	ـ١	١
اختبار المثالية $ص_{و}$		٨	٢	٣	٤	٥	١
$ر_{و}$ ـ $ص_{و}$			صفر	صفر	ـ٣	ـ٥	ـ١

وبالنظر إلى الجدول الأمثل السابق يتبين الآتي:

١- الحل يعتبر حلاً أمثلاً، لأن معاملات كافة متغيرات صف ($ر_{و}$ ـ $ص_{و}$): إما صفرية أو سالبة.

٢- يتحدد مزيج الإنتاج الأمثل علي أساس

$س_{١}$ = ١ وحدة

$س_{٢}$ = ٢ وحدة

$س_{٣}$ = صفر

٣- أقص ربحية ممكنة = ٨ جنيهات.

٤- أسعار ظل الموارد تتحدد كالآتي:

$غ_{١}$ مورد العمل المباشر = ٥ جنيهات؛ وطاقته مستغلة بالكامل.

$غ_{٢}$ مورد المواد الخام = ١ جنيهاً؛ وطاقته مستغلة بالكامل.

٥- إجمالي الأرباح = ٨ جنيهات = إجمالي تكلفة الموارد المستخدمة في الإنتاج وتتحدد كالآتي:

١ × ٥ + ٣ × ١ = ٥ + ٣ = ٨ جنيهات

وتجدر الإشارة هنا، إلى أننا إذا قمنا بإجراء تحليل الحساسية، فإننا يمكننا الحصول علي معلومات هامة وذات قيمة جوهرية، تتعلق بجداول الإنتاج البديلة وثيقة الصلة بالحل الأمثل؛ حيث تعتبر هذه المعلومات ذات أهمية ونفع كبيرين للإدارة، بما قد يفوق أهميته تحديد الحل الأمثل نفسه؛ ويمكن القول كحقيقة هامة أن أحد أسباب انتشار البرمجة الخطية في الحياة العملية، يتمثل في قدرتها على إجراء تحليل الحساسية جنباً إلي جنبٍ، مع التوصل إلى الحل الأمثل.

١. التغييرات في معاملات دالة الهدف ($ب_ر$):

قد تحدث تغييرات في معاملات دالة الهدف، وذلك بما يؤدي إلى حدوث تغيير في ربح أو تكلفة أحد أو بعض متغيرات النموذج، والذي قد يكون متغيراً أساسياً في الحل الأمثل؛ وقد يكون متغيراً غير أساسي في هذا الحل؛ وذلك كما يتبين فيما يلي:

١/١. تغيير معاملات دالة الهدف لمتغير غير أساسي:

يتبين من جدول مزيج الإنتاج الأمثل، أن: المنتج $س_٣$ لم يتم إنتاجه بسبب انخفاض هامش مساهمة الوحدة منه ($ب_٣$) حيث تبلغ ١ جنيهاً واحداً؛ وقد يكون من الضروري والمهم هنا أن نحاول إيجاد مدى Range من القيم لمعامل الربح ($ب_٣$)، بحيث يظل الحل الأمثل الحالي على ما هو عليه. وهنا نتبين من دراسة الجدول الأمثل، أن أي انخفاض في المعامل ($ب_٣$) إلى أقل من ١ جنيهاً واحداً، لن يكون له تأثير على الحل الأمثل الحالي، لأن المنتج $س_٣$ سوف يظل غير مربح، ولكن إذا زاد هامش مساهمة الوحدة منه فوق قيمة معينة: فإن المنتج $س_٣$ قد يصبح إنتاجه أمراً مربحاً للمنشأة.

وعندما تتغير قيمة ($ب_٣$) والتي تتعلق بالمنتج $س_٣$، فان قيمة معامل هذا المتغير في صف التقييم النهائي، سوف تتغير في الجدول الأمثل؛ مع ملاحظة أن الجدول الأمثل السابق سيظل أمثلاً طالما بقي معامل $س_٣$ في صف التقييم النهائي سالباً.

ويتبين من جدول السمبلكس الأمثل الحالي، أن ربح الوحدة من المتغيرين س$_{١}$، س$_{٢}$ هو (٢، ٣) علي الترتيب وعلي ذلك فان معامل المتغير س$_{٣}$ في صف التقييم النهائي(رو ـ ص و): ($\overline{ب_{٣}}$) يتحدد كالآتى:

$\overline{ب_{٣}}$= ب$_{٣}$ – (٢،٣) [-١] = ب$_{٣}$ – ٤

(ملاحظة: ١. سيتم استخدام الرمز: $\overline{ب_{٣}}$ ليشير إلى معامل س$_{٣}$ في صف التقييم النهائي (رو ـ ص و).

٢. يدل $\begin{bmatrix} -١ \\ ٢ \end{bmatrix}$ على عمود س$_{٣}$

٣. يدل (٢، ٣) على متجه الأرباح أو عمود ر$_{و}$ بالجدول الأمثل.)

$\overline{ب_{٣}}$= ب$_{٣}$ – (٢،٣) $\begin{bmatrix} -١ \\ ٢ \end{bmatrix}$ = ب$_{٣}$ – ٤

وهنا يجب أن نلاحظ أنه: لكي يكون الجدول السابق جدولاً أمثلاً: فان معامل المتغير س$_{٣}$ في صف التقييم النهائي $\overline{ب_{٣}}$= ب$_{٣}$ - ٤ ≥ صفر أو ب$_{٣}$ ≥ ٤ ؛ أي أننا يمكننا القول بأنه طالما أن ربح الوحدة من المنتج س$_{٣}$ أقل من ٤ جنيهات، فإن إنتاج المنتج س$_{٣}$ لن يكون اقتصادياً؛ وسيظل مزيج الإنتاج الحالي بمثابة المزيج الأمثل؛ ولكن إذا فرضنا أن ربح الوحدة من المنتج س$_{٣}$ قد زاد إلى ٦ جنيهات، حينئذ فان $\overline{ب_{٣}}$ = ٦ ـــ ٤= +٢ وحينئذٍ، فإن مزيج الإنتاج الحالي لن يكون أمثلاً، لأنه يمكن زيادة الأرباح القصوى بإنتاج المنتج س$_{٣}$، ويترتب على ذلك أن جدول السمبلكس السابق لن يكون الجدول الأمثل، حيث أنه يمكن إدخال س$_{٣}$ في الأساس لزيادة قيمة دالة الهدف؛ وبتطبيق قاعدة أصغر قيمة موجبة فإن المتغير س$_{٢}$ سوف يترك الأساس ليحل س$_{٣}$ محله.

ويمكن القول كقاعدة عامة: أن حساسية الحل الأمثل الحالي يمكن التوصل إليها بأفضل طريقة ممكنة، من خلال دراسة كيف سيتغير الجدول الأمثل الحالي إذا ما تغيرت مدخلات البيانات؛ ويظهر الحل الأمثل الجديد كالآتى:

ر و	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	س١	س٢	س٣	غ١	غ٢
			٢	٣	١	صفر	صفر
٢	س١	١	١	صفر	-١	٤	-١
٣	س٢	٢	صفر	١	**٢**	-١	١
اختبار المثالية ص و		٨	٢	٣	٤	٥	١
ر و - ص و			صفر	صفر	-٣	-٥	-١

ر و	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	س١	س٢	س٣	غ١	غ٢
			٢	٣	٦	صفر	صفر
٢	س١	٢	١	$\frac{1}{2}$	صفر	$\frac{7}{2}$	$\frac{-1}{2}$
٦	س٣	١	صفر	$\frac{1}{2}$	١	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$
اختبار المثالية ص و		١٠	٢	٤	٦	٤	٢
ر و - ص و			صفر	-١	صفر	-٤	-٢

وعلي ذلك فان مزيج الإنتاج الأمثل (الجديد) يتحدد علي أساس إنتاج ٢ وحدة من س١، ووحدة واحدة من س٣ ؛ وذلك بربحية قصوى تبلغ ١٠ ج.

ويمكن القول في ضوء ما سبق أن ربح الوحدة من المنتج س٣ يجب أن تزيد من ١ جنيهاً، إلى أكثر من ٤ جنيهات، وذلك لكي يكون مربحاً، ويكون في الإمكان تغيير مزيج الإنتاج الأمثل الحالي؛ ولما كان هامش مساهمة الوحدة من المنتج س٣ = ١ جنيهاً؛ وإعتبر س٣ في ضوء ذلك متغيراً غير أساسي وغير مربحٍ، ولم يدخل الأساس في الحل الأمثل، لذلك فإنه يجب أن يكون واضحاً أن أي معدل ربح لهذا المتغير يقل عن ١ جنيهاً: سوف يؤدي أيضاً إلي استبعاده من المزيج الأمثل؛ وعلى ذلك فإن معامل المتغير س٣ – غير الأساسي – في دالة الهدف، يمكن أن يقع بين (صفر، ٤) ويظل الحل الحالي حلاً أمثلاً؛ أما إذا زاد معدل ربح الوحدة من س٣ عن ٤ جنيهات وأصبح ٦ جنيهات كما افترضنا: فإن الحل الحالي لن يكون حلاً أمثلاً؛ ويجب تعديله والتوصل إلى الحل الأمثل الجديد علي النحو السابق.

وعلى ذلك، فان معاملات المتغيرات غير الأساسية، في صف التقييم النهائي (رو ــ ص و)، تمثل أقصى إضافة موجبة لمعاملات دالة الهدف الأصلية، والتي تسمح للحل بأن يظل حلاً أمثلاً.

2/1. تغيير معاملات دالة الهدف لمتغير أساسي:

لتحديد تأثير التغيير، في معدل ربح الوحدة ($ب_١$) من المنتج $س_١$. فإننا نجد أنه من الواضح أنه عندما تنخفض $ب_١$ وتصل إلى أقل من مستوى معين، فانه من غير المربح إدخال المنتج $س_١$ في مزيج الإنتاج الأمثل؛ وحتي عندما تزيد $ب_١$ فإنه من الممكن أن يغير ذلك من مزيج الإنتاج الأمثل عند مستوي معين؛ ويحدث ذلك عندما يصبح المنتج $س_١$ مربحاً جداً، بحيث أن مزيج الإنتاج الأمثل قد لا يتضمن سواه؛ وعلى ذلك فإننا نجد هناك حداً أعلى، وحداً أدنى للتغيير في $ب_١$، ولا يتأثر الحل الأمثل الحالي السابق إيجاده، إذا ما حدث التغيير بين هذه الحدود.

ولتحديد مدي التغيير في $ب_١$: فانه يجب أن نلاحظ أن تغيير ما في $ب_١$ يغير متجه ربح الوحدة (ب ر) المتعلق بالمتغيرات الأساسية، حيث ب ر = ($ب_١$، $ب_٢$).

ولكن هذا التغيير لن يؤثر علي معاملات هذه المتغيرات الأساسية في صف التقييم النهائي (رو ــ ص و)، وهي $\overline{ب}_١$، $\overline{ب}_٢$، حيث تظل قيم هذه المعاملات تساوي صفراً؛ ولكن سوف يؤثر هذا التغيير علي معاملات المتغيرات غير الأساسية في صف التقييم النهائي (رو ــ ص و)، وهي $\overline{ب}_٣$، $\overline{ب}_٤$، $\overline{ب}_٥$، ولكن طالما أن معاملات هذه المتغيرات غير الأساسية ظلت سالبةً، فإن الجدول السابق سيظل بمثابة الجدول الأمثل، ويمكن التعبير عن قيم $\overline{ب}_٣$، $\overline{ب}_٤$، $\overline{ب}_٥$، كدالة للمعامل $ب_١$ كالآتي:

$$\overline{ب}_٣ = ١ - (ب_١ ، ٣) \begin{bmatrix} -١ \\ ٢ \end{bmatrix} = [١ - (- ب_١ + ٦)] = ب_١ - ٥$$

$$\overline{ب}_٤ = \text{صفر} - (ب_١ ، ٣) \begin{bmatrix} ٤ \\ -١ \end{bmatrix} = [\text{صفر} - (-٤ ب_١ - ٣)] = -٤ ب_١ + ٣$$

$$\overline{ب}_٥ = \text{صفر} - (ب_١ ، ٣) \begin{bmatrix} -١ \\ ١ \end{bmatrix} = [\text{صفر} - (- ب_١ + ٣)] = ب_١ - ٣$$

ومن الحسابات الموضحة أعلاه فإننا نجد أن:

$\overline{ب_٣}$ ≥ صفر طالما أن $ب_١$ ≥ ٥

وبالمثل، فإننا نجد أن كل متغير غير أساسي يضع حدوداً معينةً (حد أدنى أو حد أعلى) على قيمة المعامل $ب_١$، وعلى ذلك فإن:

$\overline{ب_٤}$ ≥ صفر تعني أن $ب_١$ ≤ $\frac{3}{4}$

كما أن $\overline{ب_ه}$ ≥ صفر تعني أن $ب_١$ ≥ ٣

وسيظل الجدول الأمثل السابق: جدولاً أمثلاً، طالما أن التغيير في $ب_١$ يقع في الحدود التي حددتها المتغيرات غير الأساسية؛ فمثلا لو أخذنا مدى للتغيير في $ب_١$ مثل ($\frac{3}{4}$، ٣)، بمعنى أن $ب_١$ يمكن أن تتغير من $\frac{3}{4}$ فأكثر إلى أقل من أو يساوي ٣، فإن كل معاملات المتغيرات غير الأساسية في صف التقييم النهائي، سوف تظل سالبة، والحل الأمثل الحالي الذي تحدد علي أساس أن $س_١$ = ١، $س_٢$= ٢، $س_٣$= صفر؛ لايزال حلاً أمثلاً؛ ومن المنطقي أنه طالما أن $ب_١$ تتغير: فإن القيمة المثلى لدالة الهدف سوف تتغير أيضاً، فمثلاً عندما تكون $ب_١$= ١ فإن الحل الأمثل يتحدد علي أساس أن $س_١$ = ١، $س_٢$= ٢، $س_٣$= صفر، إلا أن أقصى ربح = ٧ جنيهات؛ وعندما تبعد قيم $ب_١$ عن الحدود التي وفرها تحليل الحساسية، حينئذ فإن الحل السابق لن يظل حلاً أمثلاً، لأن معامل أحد المتغيرات غير الأساسية في صف التقييم النهائي ب ر سوف يصبح موجباً؛ ويمكننا في هذه الحالة استخدام طريقة السمبلكس لإيجاد الحل الأمثل الجديد كما سبق وأن أوضحنا في الحالة (١/١).

وعلى وجه العموم: فإن ما ينطبق على معامل المتغير الأساسي $س_١$، ينطبق على معامل المتغير الأساسي $س_٢$.

<u>٣/١. تغيير معامل دالة الهدف لكل من المتغيرات الأساسية، وغير الأساسية:</u>

إذا افترضنا أنه قد تم تغيير هامش مساهمة المنتجات الثلاثة جميعها، بحيث أن دالة الهدف أصبحت كالآتي:

تعظيم أرباح ١ $س_١$ + ٤ $س_٢$ + ٢ $س_٣$

في الحقيقة فإننا يمكننا تحديد تأثير مثل هذا التغيير على الحل الأمثل، عن طريق اختبار ومراجعة معاملات المتغيرات في صف التقييم النهائي (رو ـ ص و)، والتحقق أو التأكد من أنها لا تزال سالبة بمعنى أن:

$\overline{ب_١}$ = $\overline{ب_٢}$= صفر، (وهي معاملات المتغيرات الأساسية في صف التقييم النهائي (رو ـ ص و)، بينما تتحدد المعاملات الأخري على النحو الآتي:

$\overline{ب_٣}$= ٢ـ (٤،١) $\begin{bmatrix} -١ \\ ٢ \end{bmatrix}$ = ـ٥ ≥ صفر

$\overline{ب_٤}$= صفرـ (٤،١) $\begin{bmatrix} ٤ \\ -١ \end{bmatrix}$ = صفر

$\overline{ب_٥}$= صفر ـ (٤،١) $\begin{bmatrix} -١ \\ ١ \end{bmatrix}$ = ـ٣ ≥ صفر

وعلي ذلك، فإنه طالما أن معاملات المتغيرات غير الأساسية في صف التقييم النهائي (رو ـ ص و)، مازالت معاملات سالبة، بعد التغيير في قيم معاملات دالة الهدف، فإن الحل الأمثل لن يتغير ويتحدد مزيج الإنتاج الأمثل علي أساس أن: $س_١$= ١، $س_٢$= ٢، $س_٣$= صفر. غير أننا نلاحظ أن قيمة دالة الهدف قد أصبحت = ٩ جنيهات؛ كما يلاحظ أيضاً أنه قد توفر لدينا مؤشر عن وجود حالة مثالية بديلة، حيث أن سعر الظل $ت_٤$= صفر (وذلك كما سبق وأن أوضحنا في الفصل الرابع: حالة تعدد المثالية).

٢. التغيير في ثوابت الطاقة ($ح_ر$):

إذا افترضنا توافر وحدة إضافية من مورد العمل، وأرادت إدارة المنشأة تحديد كيفية تأثير هذا التغيير علي مزيج الإنتاج الأمثل؛ فإننا نلاحظ في مثل هذه الحالة، أن إضافة وحدة عمل أخرى، من شأنه أن يعمل على تغيير متجه ثوابت الجانب الأيسر في جدول السمبلكس المبدئي؛ بمعنى أن متجه الثوابت في جدول السمبلكس المبدئي السابق سوف يتغير من ( ) إلى: ( )

إلا أننا نلاحظ هنا أن مثل هذا التغيير ليس له أي تأثير علي الجدول الأمثل، باستثناء التغييرات في قيم الثوابت ـ المجموع الكمي ـ كما نلاحظ أنه حتي بعد التغيير لو ظلت ثوابت الجانب الأيسر موجبة: فإن الحل الأمثل السابق يظل حلاً أساسياً ممكناً؛ ولأن معاملات المتغيرات في صف التقييم

النهائي $\overline{\text{ب ر}}$ هي نفسها (أي أنها لا تزال سالبة) فإن هذا الجدول يصبح أيضا حلاً أمثلاً للمشكلة.

وترتيباً على ذلك، فإنه لكي يمكن دراسة تأثير التغيير في ثوابت الجانب الأيسر: فإن التحقق من بقاء ثوابت المتجه الجديد في الجدول النهائي موجبة يعتبر كافياً، وذلك بدون الحاجة إلى إعداد حل للبرنامج مرة ثانية؛ حيث تتحدد قيمة الثوابت الجديدة على النحو الآتي:

مصفوفة المتغيرات الراكدة

التي تمثل قيود الموارد في الحل الأمثل — **متجه الثوابت المعدل** — **متجه الثوابت الجديد**

$$\begin{matrix} & \text{غ}_{١} & \text{غ}_{٢} \\ \text{س}_{١} & ٤ & -١ \\ \text{س}_{٢} & -١ & ١ \end{matrix} \qquad \begin{bmatrix} ٢ \\ ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ١ \end{bmatrix}$$

وفي ضوء ما سبق؛ فإننا يمكن أن نتبين أنه: عندما تغيرت قيم الثوابت في الجدول المبدئي إلى $\begin{pmatrix} ٢ \\ ٣ \end{pmatrix}$ فان القيم الجديدة للثوابت في الجدول الأمثل تصبح $\begin{pmatrix} ١ \\ ٥ \end{pmatrix}$ وهي موجبة.

كما نلاحظ أن الجدول السابق الأمثل سيظل كما هو أمثلاً؛ ويتحدد مزيج الإنتاج الأمثل الجديد كما يتبين من متجه الثوابت الجديد على أساس $\text{س}_{١}$ = ٥، $\text{س}_{٢}$= ١، $\text{س}_{٣}$= صفر، وتصبح أقصى قيمة لدالة الهدف= ١٣ جنيهاً (= ٥ × ٢ + ١ × ٣).

حيث نلاحظ هنا أن كلاً من الحل الأمثل والقيمة المثلى لدالة الهدف، قد تغير، وذلك بسبب التغيير في الطاقة المتاحة من مورد العمل؛ غير أننا يمكننا أن نلاحظ أن الأساس الأمثل لم يتغير، بمعنى أن المنتجين $\text{س}_{١}$، $\text{س}_{٢}$ فقط لا يزال هو الحل الأمثل، وأن الاختلاف الوحيد إنما تمثل في كمية ما يجب إنتاجه منهما.

وعلى افتراض أنه قد أمكن الحصول علة وحدة عمل إضافية، عن طريق وقت عمل إضافي ينتج عنه تكاليف إضافية تبلغ ٤ جنيهات عن كل وحدة عمل إضافية، وتسعى الإدارة بل وترغب دائماً في تحديد ما إذا كان من المربح لها أن تستخدم هذا الوقت الإضافى.

في حقيقة الأمر، يمكننا التوصل إلى هذا القرار، عن طريق مقارنة الزيادة في الأرباح نتيجة استخدام وقت العمل الإضافي مع التكاليف الإضافية التي تنشأ نتيجة هذا القرار؛ وبالتطبيق على المثال الحالي، فإننا نجد أن الزيادة في الربح = ١٣ـ ٨= ٥ جنيهات؛ وهي أكثر من تكلفة الوقت الإضافي (٤ جنيهات)؛ وبالتالي فإنه من المربح الحصول على وحدة واحدة إضافية من العمل.

ويطلق علي الربح الزائد (٥ جنيهات عن كل وحدة عمل إضافية): سعر ظل قيد العمل؛ ويساعد معرفة الإدارة لأسعار الظل لقيود الموارد المختلفة، في تحديد مقدار ما يمكن تحمله أو سداده من أجل زيادة الموارد المقيدة؛ كما أن سعر الظل الخاص بقيد المواد الخام هو ١ جنيهاً؛ وهنا يجب ان نلاحظ أن أسعار الظل إنما تعكس التغير النهائي في قيمة دالة الهدف والناتجة من إضافة وحدة واحدة من الموارد المقيدة، طالما أن التغيير في الموارد المقيدة لم يغير الأساس الأمثل.

وترتيباً على ذلك، فإنه لكي يمكن استخدام أسعار الظل بطريقة مفيدة، فانه يجب أن نحسب مدى التغير في المورد المقيد، بحيث يبقى الأساس الأمثل (مزيج الإنتاج) على ما هو عليه.

ولتوضيح ذلك، فإننا يمكننا القيام بحساب كيف يمكن أن يتغير العمل المتاح (بالزيادة أو بالنقص)، (ويظل الأساس الأمثل الحالي (مزيج الإنتاج) على ما هو عليه.

فإذا كانت (حـَ ١) ترمز إلي مقدار العمل المتاح، (حـَ) ترمز إلي متجه الثوابت الجديد في جدول السمبلكس المبدئي فإن:

$$\text{ح}' = \begin{bmatrix} \text{ح}'_1 \\ \\ 3 \end{bmatrix}$$

ولكي يكون جدول السمبلكس السابق جدولاً أمثلاً كما هو: فان حاصل ضرب كل عمود من أعمدة المتغيرات في جدول السمبلكس الأمثل × قيمة الثوابت الجديد يجب أن يكون أكبر من أو يساوي صفر بمعني أن:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{ح}'_1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\text{ح}_1 - 3 \\ -\text{ح}_1 + 3 \end{bmatrix}$$

ويكون حاصل الضرب موجباً طالما أن:

$4\text{ح}_1 - 3 \geq$ صفر أو $\text{ح}_1 \geq \frac{3}{4}$

$-\text{ح}_1 + 3 \geq$ صفر أو $\text{ح}_1 \leq 3$

الأمر الذي يعني أن س_1، س_2 ستظل تعبر عن المزيج الأمثل للإنتاج، طالما أن العمل المتاح يتغير بين $\frac{3}{4}$ من الوحدة إلى ٣ وحدات؛ إلا أن الحل الأمثل سيتغير، وستتغير قيمة أقصى الأرباح؛ وعلى ذلك يكون قد توفر لدينا مدى من الحلول المثلى تتحدد على النحو الآتي:

بالنسبة لكل قيم $\frac{3}{4} \leq \text{ح}_1 \leq 3$: فإن الحل الأمثل يصبح:

$\text{س}_1 = 4\text{ج}_1 - 3$ أي أن: $\text{س}_1 =$ صفر أو $\text{س}_1 = 9$

$\text{س}_2 = -\text{ج}_1 + 3$ أي أن: $\text{س}_2 = \frac{9}{4}$ أو $\text{س}_2 =$ صفر

$\text{س}_3 =$ صفر

كما أن أقصى ربح = ٢ $(4\text{ج}_1 - 3) + 3(-\text{ج}_1 + 3) = 5\text{ج}_1 + 3$

ويعني ذلك أن أقصى ربح يمكن أن يتحقق في ضوء الحد الأدنى للتغير في ج_1، والحد الأعلى لهذا التغير يقع بين $\frac{27}{4}$ جنيه، ١٨ جنيهاً.

أي أنه لن يقل عن $\frac{27}{4}$ جنيه ولن يزيد علي ١٨ جنيه.

وكمثال آخر؛ فإذا زادت ساعات العمل المتاح إلى ٤ وحدات، وهو الأمر الذي يعني أن قيم ثوابت الجانب الأيسر كما تظهر في جدول السمبلكس المبدئي سوف تتغير إلي $\left[\begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix}\right]$؛ وتتحدد القيم الجديدة لهذه الثوابت في جدول السمبلكس الأمثل النهائي على النحو الآتي:

مصفوفة المتغيرات الراكدة:

في جدول السمبلكس الأمثل متجه الثوابت المعدل متجه الثوابت الجديد

	غ$_1$	غ$_2$
س$_1$	٤	-١
س$_2$	-١	١

$\begin{bmatrix} ٤ \\ ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٣ \\ -١ \end{bmatrix}$

ويعني ذلك أن جدول السمبلكس النهائي، لم يصبح جدولاً أمثلاً، حيث أن الحل الأساسي الذي يقـــوم على أساس، س$_1$= ١٣، س$_2$= ـ١، س$_3$= صفر، غ$_1$= صفر، غ$_2$= صفر، حلاً غير ممكن، بسبب عدم تحقيق شرط عدم السلبية، ومن أجل إيجاد مزيج الإنتاج الأمثل الجديد، فإننا نقوم بإدراج القيم الجديدة للثوابت في جدول السمبلكس الأمثل السابق حيث يظهر ذلك على النحو الآتي:

ر$_و$	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	٢ س$_1$	٣ س$_2$	١ س$_3$	صفر غ$_1$	صفر غ$_2$
٢	س$_1$	١٣	١	صفر	ـ١	٤	ـ١
٣	س$_2$	ـ١	صفر	١	٢	ـ١	١
اختبار المثالية ص$_و$		٢٣	٢	٣	٤	٥	١
ر$_و$ ـ ص$_و$			صفر	صفر	ـ٣	ـ٥	ـ١

ونلاحظ هنا أنه على الرغم من أن جدول السمبلكس السابق غير ممكن بسبب عدم تحقق شرط عدم السالبية؛ إلا أنه يمكن التوصل إلى الحل الأمثل الجديد، بإستخدام طريقة السمبلكس الثنائية، فالمتغير س$_2$ هو المتغير

الأساسي السالب، ويجب أن يترك الأساس، كما أن المتغير غ١ هو المتغير غير الأساسي الوحيد الذي له معامل سالب، وبالتالي سوف يحل محل س$_{٢}$؛ ويظهر جدول السمبلكس الأمثل الجديد كالآتى:

			٢	٣	١	صفر	صفر
ر$_{و}$	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	س$_{١}$	س$_{٢}$	س$_{٣}$	غ$_{١}$	غ$_{٢}$
٢	س$_{١}$	٩	١	٤	٧	صفر	٣
صفر	غ$_{١}$	١	صفر	ـ١	ـ٢	١	ـ١
اختبار المثالية ص$_{و}$		١٨	٢	٨	١٤	صفر	٦
ر$_{و}$ ـ ص$_{و}$			صفر	ـ٥	ـ١٣	صفر	ـ٦

ونلاحظ هنا أن الجدول السابق يعتبر الجدول الأمثل، حيث أن ثوابت الجانب الأيسر موجب'؛ كما أنه يمثل مزيج الإنتاج الأمثل الجديد عندما تمت زيادة العمل المتاح بمقدار ٤ وحدات؛ ويتحدد هذا الحل الأمثل الجديد على أساس:

س١ =٩، س٢ = صفر، س٣ = صفر كما أن أقصى ربح = ١٨ جنيهاً.

٣. التغيير في مصفوفة القيود (أ ل $_{ر}$):

من الملاحظ أنه قد تتغير مصفوفة القيود أو معاملات هذه المصفوفة، نتيجة تغييرات معينة مثل:

(أ) إضافة أنشطة أو أوجه نشاط جديدة.

(ب)تغيير احتياجات الأنشطة الموجودة من الموارد.

(جـ) إضافة قيود جديدة.

٣/١.إضافة متغير أو نشاط جديد:

بافتراض أن إدارة المنشأة قد قررت في المثال السابق، القيام بإدخال منتج جديد س$_{٤}$، بحيث يحتاج هذا المنتج إلى: وحدة واحدة من مورد العمل

ووحدة واحدة من مورد المواد الخام، وأنه تتوافر السوق اللازمة لتسويقه، كما تحقق الوحدة منه هامش مساهمة يبلغ ٣ جنيهات؛ وترغب إدارة المنشأة في معرفة ما إذا كان تصنيع هذا المنتج يعتبر اقتصادياً أم لا.

نلاحظ هنا أن إدخال منتج جديد في مزيج الإنتاج الحالي، يعتبر رياضيا – معادلاً لإضافة متغير جديد – وليكن $س_٣$ – له عمود $\binom{١}{١}$ في جدول السمبلكس المبدئي في المثال السابق – كما نلاحظ أن مزيج الإنتاج الأمثل الحالي السابق تحديده سيظل أمثلاً طالما أن معامل ربح هذا المنتج الجديد في صف التقييم النهائي ($ر_و$ – $ص_و$) – أي: $ب_٤$ – معامل سالب، وحتي يمكن إيجاد معامل المنتج الجديد في صف التقييم النهائي، فإننا يجب أن نقوم بحساب التأثير النهائي على مستوى الأرباح نتيجة إضافة وحدة واحدة من مورد العمل، وإضافة وحدة واحدة من مورد المواد الخام، من أجل إنتاج وحدة واحدة من المنتج الجديد $س_٤$؛ حيث أن إضافة وحدة واحدة من مورد العمل يؤدي إلى: زيادة ما ينتج من $س_١$ (+٤) وتخفيض ما ينتج من $س_٢$ (–١) ؛ وإضافة وحدة واحدة من مورد المواد الخام لإنتاج المنتج الجديد سيؤدي إلى: تخفيض ما ينتج من $س_١$ (–١) وزيادة ما ينتج من $س_٢$ (+١) ويظهر التأثير النهائي علي الأرباح على النحو الآتي:

$$\begin{matrix} \\ س_١ \\ س_٢ \end{matrix}\begin{bmatrix} س_٤ & س_٥ \\ ٤ & -١ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} (٢،٣) = (٥،١)$$

ويكون معامل $س_٤$ في صف التقييم النهائي($ر_و$ – $ص_و$) هو:

$$ب_٤ = ٣ - [\binom{١}{١}] (٥،١) = -٣$$

حيث يبين هذا المعامل السالب أن: إنتاج المنتج الجديد $س_٤$ لن يساهم في تحسين القيمة الحالية لأقصى ربحية، ويظل الحل الأمثل السابق كما هو.

غير أننا نلاحظ أنه في الحالات التي يتبين منها أن المتغير أو النشاط الجديد، يمكن أن يساهم في زيادة الأرباح، حيث تكون قيمة معامل ت ر

موجبة في صف التقييم النهائي، فإننا حينئذ يمكننا تطبيق طريقة السمبلكس لتحديد الحل الأمثل الجديد.

<u>٣/٢. التغيير في احتياجات الأنشطة الموجودة من الموارد:</u>

من الملاحظ أنه عندما تتغير احتياجات الموارد كالعمل أو المواد الخام لمتغير ما غير أساسي في الحل الأمثل – مثل المتغير س٣ – فإنه يمكن دراسة تأثير ذلك على الحل الأمثل، عن طريق إتباع نفس الخطوات التي اتبعت في الحالة (٣/١)؛ غير أنه إذا تغيرت معاملات القيود لمتغير ما أساسي – مثل المتغير س١ أو س٢: فإننا حينئذ سنجد أن المصفوفة الأساسية نفسها سوف تتأثر، مما يؤدي بالتبعية إلى التأثير علي كل القيم المعطاة في جدول السمبلكس الأمثل السابق، الأمر الذي يترتب عليه عدم إمكانية هذا الجدول؛ ويكون من الأفضل في مثل هذه الظروف ضرورة القيام بحل البرنامج الخطي كله مرةً ثانيةً.

<u>٣/٣. إضافة قيود جديدة:</u>

إذا افترضنا أنه قد تمت إضافة قيد جديد مثل الخدمات الإدارية، في المشكلة التي يتم فيها إنتاج المنتجات س١، س٢ ؛ حيث تحتاج هذه المنتجات إلي ١ ساعة، ٢ ساعة، ١ساعة من الخدمات الإدارية علي الترتيب، وأن ساعات الخدمات الإدارية المتاحة تبلغ ١٠ ساعات، فإنه يترتب على ما سبق، إضافة قيد جديد في التكوين والصياغة الأصلية للمشكلة، بحيث يأخذ الصورة الآتية:

١س١ + ٢س٢ + ١س٣ ≥ ١٠

وبهدف دراسة أثر هذا القيد على الحل الأمثل الحالي، فإن التحقق من أن مزيج الإنتاج الحالي يحقق هذا القيد الجديد يعتبر كافياً؛ ويظل الحل الأمثل الحالي – رياضياً – حلاً أمثلاً، طالما أنه يحقق هذا القيد الجديد؛ فاذا كان مزيج الإنتاج الأمثل الحالي يتحدد على أساس س١= ١، س٢= ٢، س٣= صفر.

فإن تحقيق القيد الجديد يتم على النحو الآتي:

١ (١) + ٢ (٢) + ١ (صفر) = ٥ ≤ ١٠

وعلى ذلك فان مزيج الإنتاج الأمثل، لن يحدث بشأنه أي تغيير. غير أنه إذا افترضنا أن ساعات الخدمات الإدارية المتاحة كانت ٤ ساعات فقط: فان القيد الجديد يصبح على النحو الآتي:

١س$_{١}$ + ٢س$_{٢}$ + ١س$_{٣}$ ≤ ٤

وبذلك نجد أن مزيج الإنتاج الأمثل الحالي (س$_{١}$=١، س$_{٢}$= ٢، س$_{٣}$= صفر) لن يحقق هذا القيد، ولن يظل هذا المزيج حلاً أمثلاً؛ ولكي يمكن إيجاد الحل الأمثل الجديد، فإنه يجب إضافة القيد الجديد كصف ثالث في جدول السمبلكس الأمثل السابق، وباستخدام س$_{٤}$ كمتغير راكد في القيد الجديد، فان جدول السمبلكس بعد إضافة القيد الجديد سيظهر كالآتي:

ر و			٢	٣	١	صفر	صفر	صفر
	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	س$_{١}$	س$_{٢}$	س$_{٣}$	س$_{٤}$	غ$_{١}$	غ$_{٢}$
٢	س$_{١}$	١	١	صفر	ـ١	صفر	٤	ـ١
٣	س$_{٢}$	٢	صفر	١	٢	صفر	ـ١	١
صفر	س$_{٤}$	٤	١	٢	١	١	صفر	صفر
اختبار المثالية ص و		٨	٢	٣	٤	صفر	٥	١
ر و ـ ص و			صفر	صفر	ـ٣	صفر	ـ٥	ـ١

ومن دراسة جدول السمبلكس السابق، يتبين لنا أنه ليس في صورته الصحيحة؛ حيث توجد معاملات موجبة للمتغيرات الأساسية س$_{١}$، س$_{٢}$ في الصف الثالث من المصفوفة؛ ولكي يمكن التخلص من المعاملات الموجبة للمتغيرات س$_{١}$، س$_{٢}$: فإننا نستطيع ضرب الصف الأول من المصفوفة × -١، وضرب الصف الثاني × -٢، وجمع ناتج الصفين على الصف الثالث، بحيث يمكن التوصل إلى الجدول الجديد بشكله الصحيح؛ كما نلاحظ أيضاً أن

معاملات المتغيرات في صف التقييم النهائي (ر و ـ ص و) لن تتأثر في هذه الحالة، لأن المتغير الأساسي الجديد س$_4$ يعتبرمتغيراً راكداً؛ ويظهر جدول السمبلكس الجديد في صورته الصحيحة على النحو الآتي:

ر و			٢	٣	١	صفر	صفر	صفر
	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	س$_1$	س$_2$	س$_3$	س$_4$	غ$_1$	غ$_2$
٢	س$_1$	١	١	صفر	١ـ	صفر	٤	١ـ
٣	س$_2$	٢	صفر	١	٢	صفر	١ـ	١
صفر	س$_4$	١ـ	صفر	صفر	٢ـ	١	٢ـ	١ـ
اختبار المثالية ص و		٨	٢	٣	٤	صفر	٥	١
ر و ـ ص و			صفر	صفر	٣ـ	صفر	٥ـ	١ـ

وقبل أن نحكم علي مثالية الجدول السابق، فإننا يجب أن نتأكد ونتحقق من أن الحل الناتج منه حلاً ممكناً. حيث يلاحظ أن الحل الأساسي الممكن، هو ذلك الحل الذي تكون فيه قيم المتغيرات الأساسية غير سالبة؛ ولذلك فإن الحل السابق يعتبر غير ممكن بسبب وجود قيمة سالبة (-١) للمتغير الأساسي في الحل س$_4$؛ وذلك بالإضافة إلى ذلك فإن الأساس الممكن لأي نموذج خطي، يجب أن يكون ممكناً أيضاً للنموذج الثنائي له؛ وإذا ما وجد أساس ممكن للنموذج الأصلي وكان ممكناً للنموذج الثنائي؛ فانه يكون أمثل لكليهما ؛ وهناك طريقتان لتحقيق الأساس الممكن:

<u>الطريقة الأولى: استخدام طريقة السمبلكس التي سبق دراستها</u> – عن طريق الانتقال من أساس أصلي – في النموذج الأصلي – إلى آخر إلى أن يصبح الأساس ممكناً للنموذج الثنائي أيضاً؛ ويطلق على هذا الاتجاه طريقة السمبلكس الأصلية.

<u>الطريقة الثانية: وتقوم هذه الطريقة علي أساس أنه بدلاً من التحرك من حل أساسي أصلي ممكن إلى آخر، فإنه يمكن البدء بالأساس الثنائي الممكن أولاً</u> والتوصل منه إلى الأساس الأصلي الممكن، عن طريق الإنتقال من جدول ثنائي ممكن إلى آخر؛ ويطلق على هذا الإتجاه طريقة السمبلكس الثنائية.

وتستخدم هذه الطريقة نفس جدول السمبلكس الذي يمثل طريقة السمبلكس الأصلية، ولكن تشترط أن تكون كل معاملات المتغيرات في صف التقييم النهائي ($ر_و - ص_و$) معاملات غير سالبة للتوصل إلى الحل الأمثل، كما تستلزم أن تكون جوانب الجانب الأيسر – المجموع الكمي – غير سالبة؛ وعلى ذلك فإنها تستخدم القواعد الرياضية التي تساعد علي جعل ثوابت الجانب الأيسر غير سالبة، مع عدم الإخلال في نفس الوقت بالمعاملات غير السالبة في صف التقييم النهائى($ر_و - ص_و$)؛ ويمكن القول في ضوء ذلك، أن هناك دائماً حلاً أساسياً، ويكون ممكناً ثنائياً، ولكن ليس أساسياً ممكناً أصلياً ناتجاً من الانتقال من حل إلي آخر؛ وتتوقف قواعد طريقة السمبلكس الثنائية عندما تصبح كل ثوابت الجانب الأيسر غير سالبة، ويكون لدينا جدولاً يتضمن حلاً ممكناً أصلياً وثنائياً وبالتالي حلاً أمثلاً؛ ويتم تطبيقها كالآتى:

١- اختيار متغير أساسي ليترك الأساس:

ويتم ذلك باختيار المتغير الأساسي المتسبب في جعل الحل الحالي غير ممكن، بمعن أنه يتم اختيار المتغير الأساسي الخارج الذي تكون قيمته سالبة، والمتغير الأساسي الذي يكون له أكبر قيمة سالبة يتم اختياره أولاً ليترك الأساس.

٢- اختيار متغير غير أساسي ليدخل الأساس:

يتم اختيار العمود الرئيس بحيث يحقق الشرطين الآتيين:

(أ) يجب أن يقلل عدم الإمكانية في النموذج الأصلي بقدر الإمكان، بمعنى أنه يتم اختيار تلك المتغيرات غير الأساسية ($س_ر$) والتي لها معاملات سالبة في صف المتغير الذي سيترك الأساس لأنها تحقق التوصل إلى ثابت الجانب الأيسر الموجب.

(ب) أن يظل الجدول التالي – بعد عملية الانتقال إلى جدول آخر – ممكناً ثنائياً؛ ويمكن ضمان تحقيق ذلك لو أن المتغير غير الأساسي الذي سيدخل الأساس قد تم اختياره طبقاً لقاعدة أقصى معدل: إذا كان النموذج الثنائي يهدف إلى تعظيم الربح؛ أو قاعدة أدنى معدل: إذا كان النموذج الثنائي يهدف إلى تدنية التكاليف.

وبتطبيق طريقة السمبلكس الثنائية على الجدول السابق الذي نتج عنه حل أساسي غير ممكن فإننا نتبع الآتي:

١- المتغير $س_{٤}$ له قيمة سالبة، وبالتالي يجب أن يترك الأساس.

٢- اختيار المتغير غير الأساسي الذي يدخل الأساس طبقا لقاعدة أدنى معدل، لأن النموذج الثنائي لهذا النموذج الأصلي يهدف إلى تدنية التكاليف؛ ويتم حساب هذا المعدل كالاتى:

المتغيرات غير الأساسية	معاملات المتغيرات في صف التقييم النهائى	معاملات المتغيرات في صف $س_{٤}$	المعدلات
$س_{٣}$	-٣	-٢	$\frac{3}{2}$
$غ_{١}$	-٥	-٢	$\frac{5}{2}$
$غ_{٢}$	-١	-١	١

ويكون أدنى معدل هو (١) وهو يناظر المتغير $غ_{٢}$؛ وعلي ذلك يتم اختيار المتغير $غ_{٢}$ ليدخل الأساس ويحل محل $س_{٤}$؛ ورقم المفتاح (-١) ويتم تعديل الصفوف طبقاً للقاعدة المتبعة المعروفة؛ مع ملاحظة أن الطريقة السابقة التي اتبعت في تحديد المتغير الداخل للأساس، قد قامت علي النموذج الثنائى؛ فمعاملات المتغيرات ($س_{ر}$) في صف التقييم النهائي ($ر_{و}$ - $ص_{و}$) هي القيم التجريبية للمتغيرات الثنائية - كما سبق أن ذكرنا - كما أن المعاملات السابقة لهذه المتغيرات في صف $س_{٤}$ تناظر معاملات أحد الأعمدة في المصفوفة المحورة للنموذج الثنائى؛ ويظهر جدول السمبلكس الأمثل الجديد كالآتى:

$ر_{و}$			٢	٣	١	صفر	صفر	صفر
	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	$س_{١}$	$س_{٢}$	$س_{٣}$	$س_{٤}$	$غ_{١}$	$غ_{٢}$
٢	$س_{١}$	٢	١	صفر	١	-١	٦	صفر
٣	$س_{٢}$	١	صفر	١	صفر	١	-٣	صفر
صفر	$غ_{٢}$	١	صفر	صفر	٢	-١	٢	١
اختبار المثالية $ص_{و}$		٧	٢	٣	٢	١	٣	صفر
$ر_{و}$ - $ص_{و}$			صفر	صفر	-١	-١	-٣	صفر

ويعتبر الجدول السابق جدولاً أمثلاً، حيث يتحدد مزيج الإنتاج الأمثل الجديد على أساس أن: $س_{١}$= ٢ وحدة، $س_{٢}$= ١ وحدة؛ وقد انخفض أقصى ربح من ٨ جنيهات، إلى ٧ جنيهات، حيث يلاحظ هنا أن سبب ذلك هو إضافة قيد جديد؛ ويعتبر ذلك حقيقة مؤكدة في كل مشاكل البرمجة الخطية، بمعنى أن إضافة قيد جديد لا يمكن أن يحسن قيمة دالة الهدف؛ ودائماً ما تكون القيمة المثلى القديمة أفضل من القيمة الجديدة.

مثال (٢):

تقوم إحدي المنشآت الصناعية بإنتاج مجموعة من المنتجات، يستلزم إنتاجها استخدام ثلاثة أنواع من الموارد: ١. الخدمات الفنية والإنتاجية؛ ٢. العمل؛ ٣. الخدمات الإدارية؛ ويوضح الجدول الآتي نوعية وكميات احتياجات كل منتج من المنتجات من كل مورد من الموارد، والطاقة المتاحة في كل مورد، وهامش مساهمة كل منتج؛ وذلك كمل يتبين مما يلي:

المنتجات	احتياجات الموارد (بالساعات)			هامش مساهمة (الوحدة)
	الخدمات الفنية	العمل	الخدمات الإدارية	
المنتج الأول	١	١٠	٢	١٠ جنيهات
المنتج الثاني	١	٤	٢	٦ جنيهات
المنتج الثالث	١	٥	٦	٤ جنيهات
الطاقة المتاحة بالساعات	١٠٠	٦٠٠	٣٠٠	

ولكي يمكن تحديد المزيج الإنتاجي الأمثل الذي يعمل على تعظيم الأرباح، فإنه قد تم حل البرنامج الخطي الآتي:

المطلوب تعظيم أرباح = $١٠س_{١} + ٦س_{٢} + ٤س_{٣}$

وذلك طبقا للقيود الآتية:

$س_{١} + س_{٢} + س_{٣} \geq ١٠٠$ (مورد الخدمات الإنتاجية)

$١٠س_{١} + ٤س_{٢} + ٥س_{٣} \geq ٦٠٠$ (مورد العمل)

$٢س_{١} + ٢س_{٢} + ٦س_{٣} \geq ٣٠٠$ (مورد الخدمات الإدارية)

وطبقاً لشرط عدم السلبية فإن: $س_{١}$ ؛ $س_{٢}$ ؛ $س_{٣}$ $\leq$ صفر

وقد تحدد الحل الأمثل بالجدول الآتي حيث تعتبر غ١، غ٢، غ٣ بمثابة المتغيرات الراكدة:

ر و			١٠	٦	٤	صفر	صفر	صفر
	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	س١	س٢	س٣	غ١	غ٢	غ٣
٦	س٢	$\frac{400}{6}$	صفر	١	$\frac{5}{6}$	$\frac{10}{6}$	$-\frac{1}{6}$	صفر
١٠	س١	$\frac{200}{6}$	١	صفر	$\frac{1}{6}$	$-\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	صفر
صفر	غ٣	١٠٠	صفر	صفر	٤	-٢	صفر	١
اختبار المثالية ص و		$\frac{4400}{6}$	١٠	٦	$\frac{40}{6}$	$\frac{20}{6}$	$\frac{4}{6}$	صفر
ر و – ص و			صفر	صفر	$-\frac{16}{6}$	$-\frac{20}{6}$	$-\frac{4}{6}$	صفر

والمطلوب: استخدام تحليل الحساسية (للنموذج الذي يمثل حله الأمثل الجدول المبين أعلاه) في تحديد الإجابات المناسبة لكل مما يأتي:

١- ما هو الربح الذي يجب أن تحققه الوحدة من المنتج س٣ حتي يمكن إقرار إنتاجه؟ استخرج المزيج الإنتاجي الأمثل الأكثر ربحية، إذا علمت أن ربح الوحدة من المنتج س٣ قد زاد إلي $\frac{50}{6}$ جنيهاً؟

٢- ما هو المدى الذي يمكن أن يتغير فيه ربح الوحدة من المنتج س١ ، بحيث يظل الحل الأمثل الحالي على ما هو عليه؟

٣- يدعي بعض المسئولين بالمنشأة بأن تقديرات الساعات المتاحة من مورد الخدمات الإنتاجية: قد تكون غير صحيحة؛ وأن التقدير الصحيح يبلغ ١٠٠+ ١٠ β ؛ حيث β معلمة غير معروفة. استخرج مدى التغير في β لكي يظل المزيج الإنتاجي الأمثل على ما هو عليه؟

٤- حدد أسعار الظل لكل مورد من الموارد.

٥- اقترح قسم الإنتاج بالمصنع: أن يتم القيام بإنتاج منتج جديد يحتاج إلى: ١ ساعة من مورد الخدمات الإنتاجية؛ و٤ ساعات من العمل؛ و٣ ساعات خدمات إدارية؛ كما تنبأ قسم التسويق والمبيعات بأن هذا المنتج يمكن أن يباع بما يحقق هامش مساهمة للوحدة يبلغ ٨ جنيهات؛ بماذا تنصح الإدارة؟

٦- على افتراض أن المنشأة قررت أن تنتج ١٠ وحدات على الأقل من المنتج $س_3$ ؛ فما هو المزيج الإنتاجي الأمثل؟

الإجابـــــــــة

(أولاً): يتبين من جدول المزيج الإنتاجي الأمثل أن: المنتج $س_3$ اعتبر منتجاً غير أساسي، ولم يتم إنتاجه بسبب انخفاض هامش مساهمة الوحدة منه أي ($ب_3$) حيث تبلغ ٤ جنيهات؛ ومن الواضح أن أي تخفيض في المعامل $ب_3$ إلى أقل من ٤ جنيهات، لن يكون له تأثير على الحل الأمثل الحالي، لأن المنتج $س_3$ سوف يظل غير مربحٍ.

إلا أننا إذا نظرنا إلي صف التقييم النهائي ($ر_و - ص_و$): فإننا نجد أن معامل $س_3$ أي $ب_3 = -\frac{1}{16}$ ، وهي تمثل مقدار التخفيض في القيمة المثلى لدالة الهدف، والتي تنتج من زيادة وحدة واحدة منه؛ وفي نفس الوقت فإن هذا المعامل يعتبر بمثابة أقصى إضافة موجبة لمعاملات دالة الهدف؛ وعلى ذلك فإن أقصى زيادة في الربح من المتغير $س_3$ هي: $\frac{16}{6}$ جنيهاً؛ ويعني ذلك أن هامش مساهمة الوحدة منه يجب أن يزيد من ٤ جنيه إلى أكثر من $\frac{40}{6}$ (٤ + $\frac{16}{6}$) وذلك لكي يكون مربحاً؛ كما يمكن القول بأن معامل $س_3$ في دالة الهدف يمكن أن يقع بين (صفر، $\frac{40}{6}$) ويظل الحل الحالي حلاً أمثلاً؛ إلا أنه لكي يتقرر إنتاجه فإن هامش مساهمة الوحدة منه يجب أن يكون أكبر من $\frac{40}{6}$ جنيهاً.

كما أنه عندما يكون ربح الوحدة من $س_3$ = $\frac{50}{6}$ جنيهاً؛ فإن هذا يعني أن هناك تغيير عن المدى (صفر، $\frac{40}{6}$) الذي يظل فيه المزيج الإنتاجي على ما هو عليه؛ وحينئذ فان $ب_3 = \frac{50}{6} - \frac{40}{6} = + \frac{10}{6}$ ومزيج الإنتاج الحالي لن يكون أمثلاً؛ لأنه يمكن زيادة الأرباح القصوي بإنتاج المنتج $س_3$؛ وبذلك لن جدول السمبلكس السابق هو الجدول الأمثل؛ ذلك لأنه يمكن إدخال $س_3$ في الأساس لزيادة قيمة دالة الهدف؛ وفي ضوء هذا التغيير في معامل $س_3$ في دالة الهدف، فانه يجري التعديل الآتي:

أ- عمود المتغير $س_3$ سيصبح هو عمود المفتاح: لأن له أكبر قيمة موجبة + $\frac{10}{6}$ = ($\frac{50}{6} - \frac{40}{6}$)

ب - باختبار الصفوف لتحديد المتغير الخارج الذي يحل س٣ محله: نجد أن صف س٣ هو صف المفتاح، لأنه يشمل أصغر قيمة موجبة (١٠٠ ÷ ٤)

ج - رقم المفتاح (٤).

د - يتم تعديل صف المفتاح: بقسمة الأرقام الظاهرة فيه على رقم المفتاح (٤) لينتج صف س٣ الجديد.

هـ - يتم تعديل الصفوف الأخرى طبقاً للقاعدة المعروفة؛ حيث يظهر جدول السمبلكس الأمثل على النحو الآتي:

ر و			١٠	٦	$\frac{50}{6}$	صفر	صفر	صفر
	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	س١	س٢	س٣	غ١	غ٢	غ٣
٦	س٢	$\frac{275}{6}$	صفر	١	صفر	$\frac{25}{12}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{5}{24}$
١٠	س١	$\frac{175}{6}$	١	صفر	صفر	$-\frac{7}{12}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{24}$
$\frac{50}{6}$	س٣	٢٥	صفر	صفر	١	$-\frac{1}{2}$	صفر	$\frac{1}{4}$
اختبار المثالية ص و		$\frac{4650}{6}$	١٠	٦	$\frac{50}{6}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{12}$
ر و – ص و			صفر	صفر	صفر	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{12}$

ويتحدد المزيج الإنتاجي الأمثل الجديد على النحو الآتي:

س١= $\frac{175}{6}$ وحدة، س٢= $\frac{275}{6}$ وحدة، س٣ = ٢٥ وحدة.

وتبلغ قيمة أقصى ربحية ممكنة: $\frac{4650}{6}$ جنيهاً؛ وهو يزيد عن قيمة دالة الهدف السابقة.

<u>(ثانياً):</u> لتحديد المدى الذي يمكن أن يتغير فيه معامل المتغير الأساس س١، ولا يتأثر الحل الأمثل السابق إيجاده: فإنه يجب تحديد الحد الأعلى والحد الأدنى لهذا التغيير في معامل س١ (أي ب١)؛ ولتحديد مدى التغيير في ب١، فإنه يجب أن نلاحظ هنا أن أي تغيير يحدث في ب١ من شأنه أن يغير متجه

ربح الوحدة ب ر = (ب$_{١}$، ب$_{٢}$)؛ غير أن هذا التغيير لـن يؤثر علـي معامـلات هذه المتغيرات الأساسيـة في صف التقييم النهـائي (ر $_{و}$ ــ ص $_{و}$) وهـي ب١، ب٢ ؛ حيث تظل قيم هذه المعـاملات = صفر؛ إلا أن هذا التغيير سوف يؤثر علي معاملات المتغيرات غير الأساسية في صف التقييم النـهائي(ر $_{و}$ ـ ص $_{و}$) ، وهي ب$_{٣}$، ب$_{٤}$، ب$_{٥}$ ؛ إلا أنه طالمـا أن معـاملات هـذه المتغيـرات تظل سـالبة: فإن الجدول الأمثل السابق سيظل يمثل الجدول المثل.

ويمكن التعبير عن قيم $\overline{ب_{٣}}$، $\overline{ب_{٤}}$، $\overline{ب_{٥}}$ كدالة للمعامل ب$_{١}$ كالآتى:

$$\text{ب}_{٣} = ٤ - (\text{ب}_{١}،\ ٦،\ \text{صفر}) \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} \\ ٤ \end{bmatrix} = -\frac{1}{6}\text{ب}_{١} - ١$$

$$\text{ب}_{٤} = \text{صفر} - (\text{ب}_{١}،\ ٦،\ \text{صفر}) \begin{bmatrix} -\frac{4}{6} \\ \frac{10}{6} \\ -٢ \end{bmatrix} = \frac{4}{6}\text{ب}_{١} - ١٠$$

$$\text{ب}_{٥} = \text{صفر} - (\text{ب}_{١}،\ ٦،\ \text{صفر}) \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ \text{صفر} \end{bmatrix} = -\frac{1}{6}\text{ب}_{١} + ١$$

<u>ومما سبق يمكن لنا أن نتبين أن:</u>

ب$_{٣}$ ≥ صفر طالما أن ب$_{١}$ ≤ ٦

ب$_{٤}$ ≥ صفر طالما أن ب$_{١}$ ≥ ١٥

ب$_{٥}$ ≥ صفر طالما أن ب$_{١}$ ≤ ٦

كما أن الجدول المثل السابق سيظل أمثلاً: طالما أن التغير في ب$_١$ يقع في الحدود التي حددتها المتغيرات غير الأساسية؛ وهنا يجب أن نلاحظ أن مدى التغير في ب$_١$ هو (٦، ١٥): أي أن ب$_١$ يمكن أن تتغير من ٦ فأكثر إلى أقل من أو يساوي ١٥، وسيظل الحل الأمثل الحالي على ما هو عليه، وتظل معاملات المتغيرات غير الأساسية في صف التقييم النهائي (ر$_و$ – ص$_و$) سالبة.

<u>(ثالثاً):</u> لتحديد مدي قيم β التي تحقق التقدير الصحيح لعدد الساعات المتاحة من مورد الخدمات الإنتاجية بحيث يكون ١٠٠ + ١٠ β ويظل المزيج الإنتاجي الأمثل على ما هو عليه؛ فلابد أن نحدد أولاً مدى التغيير في عدد الساعات المتاحة من الخدمات الإنتاجية ومن خلاله يمكننا أن نستنتج مدى قيم β.

نلاحظ هنا أن مورد الخدمات الإنتاجية يمثل المورد الأول جـ$_١$ في جدول السمبلكس المبدئي؛ فإذا كانت جـَ هي قيمة الثوابت الجديدة فهي تظهر كالآتى:

$$\text{جـَ} = \begin{bmatrix} \text{جـ}_{١} \\ ٦٠٠ \end{bmatrix}$$

ويجب هنا أن نلاحظ أنه لكي يظل الأساس الأمثل (مزيج الإنتاج) على ما هو عليه: فان حاصل ضرب كل عمود من أعمدة المتغيرات الراكدة (في جدول السمبلكس الأمثل) × قيم متجه الثوابت الجديد: يجب أن يكون ≤ الصفر؛ بمعني أن:

$$\begin{matrix} \text{س}_{٢} \\ \text{س}_{١} \end{matrix} \begin{bmatrix} \frac{10}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{4}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{جـ}_{١} \\ ٦٠٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{6}\,\text{جـ}_{١} - ٤٠٠ \\ -\frac{10}{6}\,\text{جـ}_{١} + ١٠٠ \end{bmatrix}$$

ويكون حاصل الضرب موجباً طالما أن:

$\frac{10}{6}$ جـ$_١$ – ٤٠٠ ≤ صفر أو جـ$_١$ ≤ ٢٤٠

$-\frac{1}{6}$ جـ$_١$ + ١٠٠ ≤ صفر أو جـ$_١$ ≥ ٦٠٠

ويعني ذلك أن: س٢، س١ سوف تبقى هي بمثابة المزيج الأمثل للإنتاج، طالما أن ساعات الخدمات الإنتاجية تتغير ما بين (٢٤٠، ٦٠٠) إلا أن الحل الأمثل سيتغير، وكذلك سوف تتغير قيمة أقصى ربحية؛ ويكون قد توفر لدينا مدى من المحلول المثلى الذي تكون فيه:

٢٤٠ ≤ جـ١ ≤ ٦٠٠ وتتحدد كالآتي:

س٢= ($\frac{10}{6}$جـ١ـ ٤٠٠) أي أن: س٢ عند أدنى حد = صفر؛

وأن: س٢ عند أعلى حد = ٦٠٠ وحدة.

س١= (ـ$\frac{10}{6}$جـ١+ ١٠٠) أي أن: س١ عند أدنى حد = ٦٠وحدة؛

وأن: س١ عند أعلى حد = صفر.

وأن أقصى ربح = ٦ ($\frac{10}{6}$جـ١ ـ ٤٠٠) + ١٠ (ـ$\frac{1}{6}$جـ١ + ١٠٠) =

$\frac{50}{6}$ جـ١ ـ ١٤٠٠

ويعني ذلك أن: أقصى ربح يمكن أن يتحقق في ضوء الحد الأدنى للتغيير في جـ١ هو: ٦٠٠ جنيهاً ($\frac{50}{6}$ × ٢٤٠ ـ ١٤٠٠)؛

وأن أقصي ربح يمكن أن يتحقق في ضوء الحد الأقصى للتغيير في جـ١ هو: ٣٦٠٠ جنيهاً ($\frac{50}{6}$ × ٦٠٠ ـ ١٤٠٠) ؛

أي أنه لن يقل عن ٦٠٠ جنيهاً ولن يزيد عن ٣٦٠٠ جنيهاً.

هذا، ويمكننا تحديد مدى قيم β من المدى السابق للتغيير في جـ١ وذلك على النحو الآتي: جـ١ = ١٠٠ + ١٠ β

٢٤٠= ١٠٠ + ١٠ β أي أن ٢٤٠ ـ ١٠٠= ١٠ β

∴ ١٤٠ = ١٠ β ∴ <u>= ١٤β</u>

جـ١= ١٠٠+ β ١٠

٦٠٠= ١٠٠ + ١٠ β أي أن ٦٠٠ ـ ١٠٠= ١٠ β

∴ ٥٠٠ = ١٠ β ∴ <u>٥٠=β</u>

<u>ويعني ذلك أن β يمكن أن تتغير بحيث تكون: ١٤ ≤ β ≤ ٥٠</u>

<u>ويظل المزيج الإنتاجي الأمثل على ما هو عليه.</u>

<u>**(رابعاً):**</u> **أسعار ظل كل مورد من الموارد تتحدد على أنها: معاملات المتغيرات الراكدة في صف التقييم النهائي (ر و ـــ ص و) في جدول السمبلكس الأمثل، وهي تظل تحت أعمدة المتغيرات الراكدة غ١، غ٢ في صف التقييم النهائي ($-\frac{20}{6}$ ، $-\frac{4}{6}$) وهي عبارة عن الزيادة أو الإضافة في مستوى الربح عن كل وحدة يتم إضافتها من مورد معين؛ فإضافة ساعة واحدة من الساعات المتاحة من المورد الأول (الخدمات الإنتاجية): سوف يؤدي إلى تحسين مستوى الأرباح بمقدار $\frac{20}{6}$ جنيهاً عن كل وحدة يتم إضافتها؛ حيث يتحدد التأثير النهائي على مستوى الأرباح كالآتي:**

بالنسبة للمنتج س٢ : + $\frac{10}{6}$(٦) = +١٠

بالنسبة للمنتج س١: − $\frac{4}{6}$(١٠) = −$\frac{40}{6}$

∴ التأثير النهائي علي مستوى الأرباح= +$\frac{20}{6}$ جنيه.

وبالنسبة للمورد الإنتاجي الثاني (وهو ساعات العمل): فإن إضافة ساعة واحدة من الساعات المتاحة من هذا المورد(ساعات العمل): سوف يؤدي إلى تحسين مستوى الأرباح بمقدار $\frac{4}{6}$ جنيهاً عن كل وحدة يتم إضافتها؛ حيث يتحدد التأثير النهائي على مستوى الأرباح كالآتي:

بالنسبة للمنتج س٢ : − $\frac{1}{6}$(٦) = − ١

بالنسبة للمنتج س١: + $\frac{1}{6}$ (١٠) = +$\frac{10}{6}$

∴ التأثير النهائي علي مستوى الأرباح= +$\frac{4}{6}$ جنيه.

أما بالنسبة للمورد الثالث (وهو الخدمات الإدارية): فإن سعر الظل الخاص به = صفر؛ ويمثله المتغير الراكد غ٣ ؛ وهذا يوضح زيادة كمية المعروض من هذا المورد؛ حيث تتمثل هذه الطاقة الفائضة في ١٠٠ ساعة عاطلة في المورد الثالث ويعبر عنها المتغير الراكد غ٣ والذي يمثل هذا المورد؛ ونلاحظ هنا أن إضافة وحدة واحدة من الطاقة المتاحة في هذا المورد

لن تؤدي إلى تحسين مستوي الأرباح؛ ذلك أن سعر ظل هذا المورد = صفر؛ ومن ثم فإن أي إضافة للعرض الفائض لن يكون له أية قيمة.

وعلي ذلك فإن سعر ظل الموارد الثلاثة يتحدد كالآتي:

مورد الخدمات الإنتاجية $= \frac{20}{4}$ جنيهاً.

مورد العمل $= \frac{4}{6}$ جنيهاً.

مورد الخدمات الإدارية = صفر.

<u>(خامساً):</u> إن اقترح قسم الإنتاج بالمصنع، بإنتاج منتج جديد وليكن $س_{٤}$ يعتبر – من الناحية الرياضية – معادلاً لإضافة متغير جديد له عمود

$$\begin{bmatrix} ١ \\ ٤ \\ ٢ \end{bmatrix}$$

في جدول السمبلكس المبدئى؛ حيث نلاحظ هنا أن المزيج الإنتاجي الأمثل الحالي السابق تحديده، سيظل أمثلاً: طالما أن معامل ربح هذا المنتج الجديد في صف التقييم النهائي ($ر_{و}$ – $ص_{و}$) أي $ب_{٤}$ معاملاً سالباً؛ ولكي يمكن إيجاد معامل هذا المنتج الجديد في صف التقييم النهائي: فانه يجب أولاً أن نحسب تأثير إضافة وحدة واحدة من كل مورد لإنتاج المنتج الجديد على مستوى الأرباح الحالى؛ فإضافة وحدة من مورد الخدمات الإنتاجية لإنتاج $س_{٤}$ سيؤدي إلي زيادة ما ينتج من $س_{٢}$ بمقدار ($\frac{10}{6}$) ؛ وتخفيض ما ينتج من $س_{١}$ بمقدار ($-\frac{4}{6}$) ، وتخفيض الطاقة العاطلة من الخدمات الإدارية بمقدار (–٢) ؛ كما أن إضافة وحدة واحدة من مورد العمل لإنتاج المنتج الجديد سيؤدي إلى تخفيض ما ينتج من $س_{٢}$ بمقدار($-\frac{1}{6}$) ؛ وزيادة ما ينتج من $س_{١}$ بمقدار($\frac{1}{6}$)؛ كما أن إضافة وحدة واحدة من مورد الخدمات الإدارية لإنتاج المنتج الجديد لن يؤثر علي مستوى الأرباح، نظرًا لوجود طاقة عاطلة فائضة في هذا المورد؛ ويحسب التأثير علي الربح من إنتاج وحدة واحدة من المنتج الجديد $س_{٤}$ كالآتى:

$$\text{س}_1\ (\text{٦، ١٠، صفر}) \begin{bmatrix} \frac{10}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{4}{6} & \frac{1}{6} \\ -\text{٢} & \text{صفر} \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{س}_2 \\ \text{س}_1 \\ \text{س}_6 \end{matrix} = (\frac{20}{6}\text{، }\frac{4}{6}\text{، صفر})$$

$$\text{ويكون معامل س}_4 = \text{٨} - (\frac{20}{6}\text{، }\frac{4}{6}\text{، صفر}) \begin{bmatrix} \text{١} \\ \text{٤} \\ \text{٣} \end{bmatrix} = +\ \text{٢}$$

ويلاحظ أن $\bar{ب}_4$ أو معامل س$_4$ في صف التقييم النهائي (ر $_و$ ــ ص $_و$) يمثل التأثير النهائي على مستوي الأرباح، من إنتاج وحدة واحدة من هذا المنتج الجديد، طبقاً لاحتياجات الوحدة منه من كل مورد من الموارد؛ كما يلاحظ أنه تم ضرب احتياجات الوحدة المنتجة من المنتج الجديد من طاقة كل مورد (١، ٤، ٣) علي الترتيب × سعر الظل الخاص بكل مورد ($\frac{20}{6}$، $\frac{4}{6}$، صفر) ؛ حيث يوضح المعامل الموجب أن: إنتاج المنتج الجديد س$_4$ سوف يساهم في تحسين القيمة الحالية لأقصى ربحية للمنشأة؛ ومن ثم فإننا ننصح الإدارة هنا باتخاذ قرار بإدخال هذا المنتج في المزيج الإنتاجي؛ ويمكن في هذه الحالة تطبيق طريقة السمبلكس لتحديد الحل الأمثل الجديد.

<u>(سادساً):</u> إذا قررت إدارة المنشأة إنتاج ١٠ وحدات على الأقل من المنتج س$_3$: فإن هذا يعني إضافة قيد جديد يأخذ الصورة الآتية:

س$_3$ ≤ ١٠

ويظهر هذا القيد ضمن التكوين والصياغة الأصلية للمشكلة.

حيث يتبين من ذلك أن: مزيج الإنتاج الحالي لن يحقق هذا القيد الجديد، لأن المنتج س$_3$ قد استبعد من المزيج الإنتاجي الأمثل؛ وعلى ذلك فإن إضافة هذا القيد سوف يغير هذا المزيج ولن يظل حلاً أمثلاً؛ ولكي يمكن إيجاد الحل

الأمثل الجديد: فإنه يجب إضافة القيد الجديد كصف رابع في جدول السمبلكس الأمثل السابق، وذلك بعد وضع المتباينة في صورة أصغر من أو يساوي لمشاكل تعظيم الأرباح

– س٣ ≥ –١٠ ومنها فإن: – س٣ + غ٤ = –١٠ ويظهر جدول السمبلكس على النحو الآتي:

ر و			١٠	٦	٤	صفر	صفر	صفر	صفر
	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	س١	س٢	س٣	غ١	غ٢	غ٣	غ٤
٦	س٢	$\frac{400}{6}$	صفر	١	$\frac{5}{6}$	$\frac{10}{6}$	$-\frac{1}{6}$	صفر	صفر
١٠	س١	$\frac{200}{6}$	١	صفر	$\frac{1}{6}$	$-\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	صفر	صفر
صفر	غ٣	١٠٠	صفر	صفر	٤	– ٢	صفر	١	صفر
صفر	غ٤	– ١٠	صفر	صفر	– ١	صفر	صفر	صفر	١
اختبار المثالية ص و		٤٠٠	١٠	٦	$\frac{40}{6}$	$\frac{20}{6}$	$\frac{4}{6}$	صفر	صفر
ر و – ص و			صفر	صفر	$-\frac{16}{6}$	$-\frac{20}{6}$	$-\frac{4}{6}$	صفر	صفر

<u>وبالنظر إلى الجدول السابق يتبين لنا أن: هذا الجدول ليس له حلاً أساسياً ممكناً؛ وذلك بسبب ظهور المتغير غ٤ في الأساس بإشارة سالبة؛ غير أننا يمكننا التوصل إلى الحل الأمثل، باستخدام طريقة السمبلكس الثنائية كما يتبين مما يلي:</u>

١- المتغير غ٤ : يترك الأساس؛ لأنه المتسبب في عدم إمكانية الحل وله أكبر قيمة سالبة.

٢- يتم اختيار المتغير غير الأساسي الذي يدخل الأساس، طبقاً لقاعدة أدنى معدل ($-\frac{16}{6}$) / –١)، لأن النموذج الثنائي لهذا النموذج الأصلي، يهدف إلى تدنية أو تخفيض التكاليف؛ ويكون أدنى معدل مناظر للمتغير س٣

٣- رقم المفتاح هو: (–١)

٤- يتم تعديل صف المفتاح: بقسمة الأرقام الظاهرة فيه ÷ رقم المفتاح (–١)

٥- يتم تعديل الصفوف الأخرى، طبقاً للقاعدة المتفق عليها، والتي تم شرحها فيما سبق(راجع صفحة٨٧)؛ ويظهر جدول السمبلكس الذي يمثل المزيج الإنتاجي الأمثل الجديد على النحو الآتي:

ر و			١٠	٦	٤	صفر	صفر	صفر	صفر
	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	$س_1$	$س_2$	$س_3$	$غ_1$	$غ_2$	$غ_3$	$غ_4$
٦	$س_2$	$\frac{350}{6}$	صفر	١	صفر	$\frac{10}{6}$	$-\frac{1}{6}$	صفر	$\frac{5}{6}$
١٠	$س_1$	$\frac{190}{6}$	١	صفر	صفر	$-\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	صفر	$\frac{1}{6}$
صفر	$غ_3$	٦٠	صفر	صفر	صفر	-٢	صفر	١	٤
٤	$س_3$	١٠	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر	-١
اختبار المثالية ص و		$\frac{4240}{6}$	١٠	٦	٤	$\frac{20}{6}$	$\frac{4}{6}$	صفر	$\frac{16}{6}$
ر و - ص و			صفر	صفر	صفر	$-\frac{20}{6}$	$-\frac{4}{6}$	صفر	$-\frac{16}{6}$

حيث يتحدد المزيج الإنتاجي الأمثل الجديد على النحو الآتي:

$س_1$= $\frac{190}{6}$ وحدة ؛ $س_2$= $\frac{350}{6}$ وحدة ؛ $س_3$= ١٠ وحدات

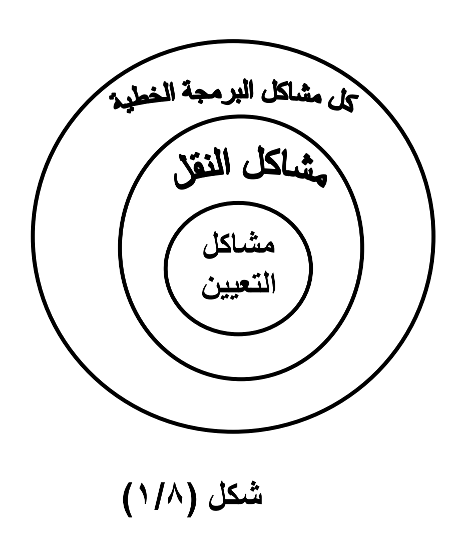
ويحقق هذا المزيج أقصى ربحية ممكنة، وتبلغ $\frac{4240}{6}$ جنيهاً.

ونلاحظ هنا أن الحل السابق: يعتبر حلاً ممكناً للنموذج الأصلي؛ بل وممكنا أيضاً للنموذج الثنائي له، وعلى ذلك فإنه يعتبر حلاً أمثلاً.

الفصل الثامن
طرق النقل والتعيين

مقدمة:

تعتبر مشاكل النقل والتعيين من المشاكل الخاصة للبرمجة الخطية وقد أمكن من خلال البحث والدراسة التوصل إلى طرق أكثر كفاءة في حل مثل هذه المشاكل من الطريقة العامة للبرمجة الخطية (السمبلكس) ويمكن تصوير العلاقة بين مشاكل البرمجة الخطية ومشكلتى النقل والتعيين في الشكل التالي:



شكل (١/٨)

يوضح العلاقة بين مشاكل النقل والتعيين بمشاكل البرمجة الخطية

يتضح من الشكل السابق (١/٨) أن مشكلة التعيين يمكن اعتبارها ضمن مشاكل النقل وأنه يمكن حلها بطريقة النقل، كما أن كل من مشكلة النقل ومشكلة التعيين يمكن حلهما باستخدام الطريقة العامة للبرمجة الخطية (السمبلكس)، ولكن حل هاتين المشكلتين يكون أسهل وأبسط باستخدام طريقة النقل وطريقة التعيين اللتان سيتم تناولهما أن شاء الله بالدراسة والتحليل خلال هذا الفصل.

١/٨ طريقة النقل:

تعتبر طريقة النقل Transportation Method طريقة خاصة من طرق البرمجة الخطية تستخدم لمعالجة توزيع السلع، والمنتجات ونقلها من المصادر المختلفة Sources إلى أماكن التوزيع أو أماكن الاستخدام المطلوب نقلها إليها Destinations وذلك في ظل اختلاف فئات تكلفة النقل بما يحقق أقصى أرباح ممكنة أو تحمل أقل تكاليف نقل ممكنة.

هذا ومن المناسب الإشارة إلى أن أول محاولة علمية لحل مشكلة النقل كانت في عام ١٩٤١م بواسطة F.L.Hitcol وفي عام ١٩٥١م تطورت طرق حل مشاكل النقل بواسطة كل من Dantzing and Cooper وفي عام ١٩٥٣م أقترح كل من Charnes and Cooper أول طريقة مبسطة لحل مشكلة النقل، تلك الطريقة التي تعرف بطريقة حجر الوطء (أو الحجر المتحرك) Stepping Stone Method وفي عام ١٩٥٥م قام Dantzing بتطوير هذه الطريقة مما جعلها أكثر سهولة وأقل مجهودا وأصبحت الطريقة تسمى بطريقة التوزيع المعدلة The Modified Distribution Method وفي نفس العام أي عام ١٩٥٥ اقترح فوجل W.R. Vogel طريقة الشهيرة في تحديد الحل المبدئي.

هذا وقبل تناول طريقة النقل بالدراسة والتحليل فإنه يبدو من المناسب الإشارة إلى ما يلي:

١- **طريقة النقل كغيرها من طرق الحل بالبرمجة الخطية تسير وفقا لمبدأ التابعية في الوصول إلى الحل الأمثل. أي أنها تبدأ بحل مبدئي ممكن للمشكلة ثم يتطور هذا الحل إلى حل أخر أفضل منه.. وهكذا حتى يتم التوصل إلى الحل الأمثل للمشكلة.**

٢- **يتطلب حل المشكلة بطريقة النقل ضرورة تساوى مجموع المعروض عند المصادر (أو المنابع) مع مجموع المطلوب عند النهايات أو نقاط الاستخدام المختلفة.**

٣- حيث أن مشاكل النقل نوع خاص من مشاكل البرمجة الخطية فإنه لحل المشكلة بطريقة النقل يلزم توافر الشروط الواجب توافرها لاستخدام، الطرق المختلفة للحل بالبرمجة الخطية والتي تتلخص فيما يلي:

أ. ضرورة تحديد ووضوح الهدف (الأهداف) المراد تحقيقه.

ب. وجود قيود على تحقيق الأهداف والتي تتمثل في الموارد المختلفة المتاحة للاستخدام.

ج. وجود علاقة خطية بين متغيرات المشكلة.

د. وجود أو توافر بدائل مختلفة للحل تحقق الهدف المنشود مع اختلاف عوائد هذه البدائل.

ه. عدم السالبية أي أن تكون قيم كل المتغيرات أكبر من أو تساوى صفر.

١/١/٨ طريقة السمبلكس ومشاكل النقل:

تعتبر مشاكل النقل من مشاكل البرمجة الخطية ذات الطابع الخاص ولذلك يمكن حلها بطريقة النقل أو بطريقة السمبلكس، فأي مشكلة نقل يمكن حلها بطريقة النقل يمكن حلها بطريقة السمبلكس ويمكن توضيح كيفية تطبيق طريقة السمبلكس على مشاكل النقل من خلال المثال التالي:

مثال ١/٨:

تنتج أحدي الشركات منتجا متجانسا من خلال مصنعين ($أ_١$، $أ_٢$) يقعان في منطقتين مختلفتين تبلغ طاقتهما الإنتاجية السنوية ١٠٠٠ وحدة، ٢٠٠٠ وحدة على الترتيب، ويتم تسويق الإنتاج من خلال منفذين للتوزيع هما ($ب_١$، $ب_٢$) تبلغ احتياجاتهما السنوية ١٨٠٠ وحدة، ١٢٠٠ وحدة على الترتيب.

وتقدر تكلفة نقل الوحدة من المصنع $أ_١$ إلى المنفذ $ب_١$ بمبلغ ٤ جنيه وإلى $ب_٢$ ٦ جنيه، ومن المصنع $أ_١$ إلى المنفذ $ب_١$ ٢ جنيه، ومن $أ_٢$ إلى $ب_٢$ ٨ جنيه، هذا وترغب إدارة الشركة في التعرف على البرنامج الأمثل للنقل الذي يمكن من نقل الكميات المنتجة إلى منافذ التوزيع بأقل تكلفة نقل ممكنة. على ضوء هذه البيانات يمكن صياغة مشكلة النقل على النحو التالي بفرض أن س تعبر عن الكمية.

١ – دالة الهدف:

تخفيض د(ت) = ٢$س_{١١}$ + ٦$س_{٢١}$ + ٢ $س_{١٢}$ + ٨ $س_{٢٢}$

٢ – القيود:

تتمثل القيود في طاقات المصادر (المصانع) واحتياجات منافذ التوزيع، وحيث أنه في المثال السابق يوجد مصدرين (مصنعين) ومنفذين للتوزيع، بذلك تكون هناك أربعة قيود اثنان للمصادر واثنان لجهات الوصول (المنافذ).

أ – قيود المصادر:

تسمى بقيود الطاقة حيث ترتبط الكميات المنقولة (س) إلى جهات الوصول بالطاقة المتاحة لكل مصدر من المصادر بذلك تكون القيود على النحو التالي:

قيد المصدر الأول:

$س_{١١}$ + $س_{٢١}$ = ١٠٠٠

أي يجب أن تتساوى الكمية المنقولة من المصنع $أ_{١}$ إلى المنفذين $ب_{١}$، $ب_{٢}$ مع طاقة المصنع $أ_{١}$.

قيد المصادر الثاني:

$س_{١٢}$ + $س_{٢٢}$ = ٢٠٠٠

أي أن الكمية المنقولة من المصنع $أ_{٢}$ إلى المنفذين $ب_{١}$، $ب_{٢}$ يجب أن تتساوى مع طاقة المصنع $أ_{٢}$.

ب – قيود الطلب (المنافذ وجهات الوصول):

تسمى هذه القيود بقيود الاحتياجات حيث تربط الكميات المنقولة (س) من المصادر إلى جهات الوصول بكمية الاحتياجات المطلوبة لكل جهة وصول.

قيد المنفذ الأول:

$س_{١١}$ + $س_{١٢}$ = ١٨٠٠

أي أن الوحدات المرسلة من المصنعين $أ_{١}$، $أ_{٢}$ إلى منفذ التوزيع $ب_{١}$ يجب أن تتساوى مع احتياجاته.

قيد المنفذ الثاني:

$س_{٢١} + س_{٢٢} = ١٢٠٠$

أي يجب أن تتساوى الكميات المنقولة من المصنعين $أ_{١}$، $أ_{٢}$ إلى منفذ التوزيع $ب_{٢}$ مع احتياجات $ب_{٢}$.

٣ – شرط عدم السالبية:

حيث أنه لا يسمح بنقل كميات سالبة، أي إما أن تكون هناك كميات منقولة فتكون قيم المتغيرات موجبة، أو لا تكون هناك كميات منقولة فتكون قيم المتغيرات صفر، ويجب توافر هذا الشرط أو الغرض لحل مشكلة النقل، وعلى ذلك فإن:

$س_{١١} + س_{٢١} + س_{١٢}\ س_{٢٢} \geq صفر$

هذا وبإضافة المتغيرات الصورية $ط_{١}$، $ط_{٢}$، $ط_{٣}$، $ط_{٤}$ إلى القيود السابقة، يكون النموذج الرياضي للمشكلة السابقة كما يلي:

دالة الهدف:

$تخفيض\ د(ت) = ٢س_{١١} + ٦س_{٢١} + ٢\ س_{١٢} + ٨\ س_{٢٢}$

$م\ ط_{١} + م\ ط_{٢} + م\ ط_{٣} + م\ ط_{٤}$

تحت القيود:

$س_{١١} + س_{٢١} + ط_{١} = ١٠٠٠$

$س_{١٢} + س_{٢٢} + ط_{٢} = ٢٠٠٠$

$س_{١١} + س_{١٢} + ط_{٣} = ١٨٠٠$

$س_{٢١} + س_{٢٢} + ط_{٤} = ١٢٠٠$

شرط عدم السلبية:

$س_{١١}،\ س_{٢١}،\ س_{١٢}،\ س_{٢٢}،\ ط_{١}،\ ط_{٢}،\ ط_{٣}،\ ط_{٤} \geq صفر$

وعلى ضوء النموذج الرياضي السابق يمكن إعداد جدول الحل المبدئي كما يلي:

جدول (١/٨) الحل المبدئي لمشكلة النقل بطريقة السمبلكس

د(ت)			٤س١١	٦س٢١	٢س١٢	٨س٢٢	م ط١	م ط٢	م ط٣	م ط٤
المتغيرات الأساسية	معاملات المتغيرات	قيم المتغيرات								
ط١	م	١٠٠٠	١	١	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر
ط٢	م	٢٠٠٠	صفر	صفر	١	١	صفر	١	صفر	صفر
ط٣	م	١٨٠٠	١	صفر	١	صفر	صفر	صفر	١	صفر
ط٤	م	١٢٠٠	صفر	١	صفر	١	صفر	صفر	صفر	١
أ ت		٦٠٠٠م	٢م	٢م	٢م	٢م	م	م	م	م
دت- أ ت			٤-١م	٦-٢م	٢-٢م	٨-٢م	صفر	صفر	صفر	صفر

هذا ويمكن بنفس الأسلوب المتبع في طريقة السمبلكس اختبار مثالية الحل السابق والاستمرار في تحسين الحل حتى يتم التوصل إلى الحل الأمثل غير أن ذلك يتطلب وقتا وجهدا كبيرا خاصة في حالة زيادة عدد المصادر وعدد المنافذ.

هذا ما دعى للدراسة والبحث عن طريقة خاصة لحل مشكلة النقل وهو ما تحقق فعلا بفضل الله تعالي، ثم بفضل جهود الباحثين والعلماء، وهو ما سوف نتناوله بإذن الله في الصفحات التالية. التي تتناول معالجة مشاكل النقل بطريقة خاصة بها بدلا من معالجتها بالطريقة العامة للبرمجة الخطية. وحيث أن الهدف من معالجة مشكلة النقل قد يكون تخفيض التكاليف وقد يكون تعظيم الأرباح فسيتم بإذن الله تناول طريقة النقل وتخفيض التكاليف ثم طريقة النقل وتعظيم الأرباح.

٢/١/٨ طريقة النقل وتخفيض التكاليف:

قد تمتلك المنشأة مصانع متعددة تنتج نفس المنتج وتكون تكلفة إنتاج الوحدة متساوية في جميع المصانع، ويسوق هذا المنتج (أو يخزن) في أسواق (أو مخازن) متعددة ولكن بنفس سعر البيع (أو بنفس تكلفة التخزين)، في مثل هذه الحالة تكون تكاليف النقل عاملا أساسيا في تحديد أرباح المنشأة

فكلما استطاعت المنشأة تخفيض تكاليف النقل من المصانع إلى الأسواق أو المخازن. لكما زادت أرباحها. وبذلك يكون الهدف في معالجة مشاكل النقل هو تدنية تكاليف النقل إلى أدنى حد ممكن.

ويمكن توضيح خطوات تطبيق طريقة النقل في حل مشاكل تخفيض تكاليف النقل من خلال المثال التالي:

مثال ٨/٢:

تمتلك إحدى المنشآت أربعة مصانع هي $أ_١$، $أ_٢$، $أ_٣$، $أ_٤$ تبلغ الطاقة الإنتاجية السنوية لهذه المصانع ٢٩٠٠، ٢٠٠٠، ١١٠٠، ٧٥٠ وحدة على التوالي، ويتم توزيع هذا الإنتاج من خلال ثلاثة منافذ للتسويق هي $ب_١$، $ب_٢$، $ب_٣$، تبلغ الاحتياجات السنوية لهذه المنافذ ٢٥٠٠، ٣٠٠٠، ١٢٥٠ وحدة على التوالي، وتقدر تكلفة نقل الوحدة من المصانع المختلفة إلى منافذ التوزيع المختلفة كما يلي:

المصانع	تكلفة نقل الوحدة (بالجنيه		
	$ب_١$	$ب_٢$	$ب_٣$
$أ_١$	٣	٧	٢
$أ_٢$	٢	٥	٥
$أ_٣$	٧	٢	٤
$أ_٤$	٦	٣	٥

هذا وترغب إدارة المنشأة في التعرف على برنامج النقل الأمثل الذي يمكن من نقل إنتاج المصانع وتلبية احتياجات منافذ التوزيع بأقل تكلفة نقل ممكنة.

يتم الوصول إلى الحل الأمثل على مرحلتين، حيث يتم في المرحلة الأولى تصميم حل مبدئي، ثم اختباره وتحسينه إذا لزم الأمر في المرحلة الثانية.

١/٢/١/٨ تصميم الحل المبدئي:

لتصميم الحل المبدئي يتم إعداد مصفوفة النقل، حيث ترتب بيانات مشكلة النقل في مصفوفة على شكل جدول يطلق عليه جدول النقل، ويخصص في هذا الجدول صف لكل مصدر بالإضافة إلى صف للمجموع، وكذلك يخصص عمود لكل جهة وصول (منفذ) بالإضافة إلى عمود للمجموع (يمكن أن يتم العكس بأن تخصص الصفوف للمنافذ والأعمدة للمصادر). هذا ويسمى المربع الذي يقع عند تقاطع الصف مع العمود بالخلية cell وتعرف الخلية برقم (أو رمز) الصف ورقم (أو رمز) العمود اللذين تقع الخلية عند تقاطعهما، ويسجل في الركن الأيمن العلوى للخلية تكلفة نقل الوحدة من المصنع (أو المصدر) إلى المنفذ.

هذا ويمكن ترتيب بيانات المثال السابق (٢/٨) في الجدول التالي:

جدول (٢/٨)

المنافذ / المصانع	ب١	ب٢	ب٣	الطاقات
أ١	٣	٧	٢	٢٩٠٠
أ٢	٢	٥	٥	٢٠٠٠
أ٣	٧	٢	٤	١١٠٠
أ٤	٦	٣	٥	٧٥٠
الإجمالي	٢٥٠٠	٣٠٠٠	١٢٥٠	٦٧٥٠

يتضح من الجدول السابق (٢/٨) ما يلي:

١- توازن مجموع كميات الاحتياجات مع مجموع كميات الطاقات وإجمالي كل منهما ٦٧٥٠ وحدة.

٢- الكمية التي تكتب داخل كل خلية تمثل الكمية المنقولة من المصدر إلى المنفذ اللذين تقع عند تقاطعهما الخلية، فمثلا الكمية التي تكتب في الخلية أ٣ ب٢ تشير إلى الكمية التي يتم نقلها من المصنع أ٣ إلى المنفذ ب٢ وبتكلفة قدرها ٢ جنيه للوحدة الواحدة.

هذا وبعد إعداد مصفوفة النقل يتم إعداد أو تصميم الحل المبدئي، ويمكن إعداد الحل المبدئي عشوائيا، وذلك بمحاولة تلبية احتياجات منافذ التوزيع في ضوء طاقات المصانع، ولكن هناك عديد من الطرق العلمية المنطقية التي أمكن الوصول إليها لإعداد الحل المبدئي والتي تجعل الحل أكثر سهولة وتوصل إلى الحل الأمثل بصورة أيسر وأسرع ومن هذه الطرق ما يلي:

أولاً: طريقة الركن الشمالي الشرقي. North- East Corner method.

ثانياً: طريقة أقل تكلفة Least- Cost method.

ثالثاً: طريقة فوجل التقريبية Vogel's Approximartion method.

وبالتطبيق على بيانات المثال السابق (٢/٨) يمكن توضيح كيفية إعداد الحل المبدئي باستخدام الطرق السابقة وذلك على النحو التالي:

أولا: طريقة الركن الشمالي الشرقي:

طبقا لهذه الطريقة يتم البدء بملء الخلية التي تقع في الركن الشمالي من الجدول أي التي تقع عند تقاطع الصف الأول مع العمود الأول (وهي الخلية أ١ ب١)، وذلك بغض النظر عن تكلفة هذه الخلية، أي أن هذه الطريقة لا تأخذ في الاعتبار تكلفة النقل بل تقضي بالبدء بالخلية أ١ ب١ حتى ولو كانت تكلفة النقل إليها أكبر من تكلفة النقل إلى الخلايا الأخرى بالجدول.

وعلى ذلك يتم البدء بتخصيص كمية من الوحدات للخلية أ١ ب١ تغطي احتياجات المنفذ ب١ وتكون هذه الكمية في حدود طاقة المصدر أ١، أي تخصص للخلية أ١ ب١ كمية في حدود احتياجات المنفذ الأول وطاقة المصدر الأول أيهما أقل. ثم الانتقال إلى الخلية التي أسفل منها مباشرة في عمودها (أ٢ ب١) أو إلى الخلية التي على يسارها في نفس صفها (أ١ ب٢) وذلك يتوقف

على طاقة أ$_{١}$ واحتياجات ب$_{١}$. فإذا كانت طاقة أ$_{١}$ أكبر من احتياجات ب$_{١}$ فيتم الانتقال إلى الخلية أ$_{١}$ ب$_{٢}$، ما إذا كانت احتياجات ب$_{١}$ أكبر من طاقة أ$_{١}$ فيتم الانتقال إلى الخلية أ$_{٢}$ ب$_{١}$ وهكذا.

هذا ويمكن توضيح ذلك من خلال تصميم الحل المبدئي للمثال السابق (٢/٨)، وذلك كما يلي:

١- **يتم البدء بالتخصيص للخلية أ$_{١}$ ب$_{١}$، وحيث أن طاقة أ$_{١}$ ٢٩٠٠ وحدة، واحتياجات ب$_{١}$ ٢٥٠٠ وحدة، لذلك تخصص للخلية أ$_{١}$ ب$_{١}$ ٢٥٠٠ وحدة وبذلك تكون احتياجات ب$_{١}$ قد استكملت بالكامل ولكن هل استخدمت طاقة أ$_{١}$؟ لا لم تستنفد بعد!**

٢- **بالتحرك بعد ذلك أفقيا في نفس الصف الأول إلى الخلية أ$_{١}$ ب$_{٢}$، يتضح أن احتياجات ب$_{٢}$ ٣٠٠٠ وحدة ولكن الباقي من طاقة أ$_{١}$ ٤٠٠ وحدة فقط (٢٩٠٠- ٢٥٠٠ خصصت للخلية أ$_{١}$ ب$_{١}$)، لذلك تدرج كل الـ ٤٠٠ وحدة للخلية أ$_{١}$ ب$_{٢}$، وبذلك تكون طاقة أ$_{١}$ قد استنفدت بالكامل. ولكن هل استكملت احتياجات ب$_{٢}$؟**

٣- **مازالت احتياجات ب$_{٢}$ لم تستكمل، لذلك يتم التحرك إلى أسفل لاستخدام طاقة أ$_{٢}$ في سداد احتياجات ب$_{٢}$، لذلك يتم التحرك إلى الخلية أ$_{٢}$ ب$_{٢}$، وحيث أن طاقة أ$_{٢}$ ٢٠٠٠ وحدة في حين أن باقي احتياجات ب$_{٢}$ ٢٥٠٠ وحدة (٢٩٠٠ وحدة – ٤٠٠ خصصت للخلية أ$_{١}$ب$_{٢}$)، لذلك تخصص كل طاقة أ$_{٢}$ للخلية أ$_{٢}$ ب$_{٢}$ بالكامل في حين أن احتياجات ب$_{٢}$ لم تستكمل بعد.**

٤- **لاستكمال احتياجات ب$_{٢}$ يلزم التحرك إلى أسفل أي إلى الخلية أ$_{٣}$ ب$_{٢}$ وهنا يتضح أن باقي احتياجات ب$_{٢}$ ٦٠٠ وحدة (٣٠٠٠ – (٤٠٠، ٢٠٠٠) في حين أن طاقة أ$_{٣}$ ١١٠٠، لذلك تخصص للخلية أ$_{٣}$ ب$_{٢}$ ٦٠٠ وحدة، وبذلك تستكمل احتياجات ب$_{٢}$، ولكن لم تستنفد بعد كل طاقة أ$_{٣}$، فمازالت ٥٠٠ وحدة متاحة.**

٥- حيث قد تم حتى الآن استكمال احتياجات ب١، ب٢، فيتم التحرك لاستكمال احتياجات ب٣، لذلك التحرك يكون أفقيا إلى الخلية أ٣ ب٣، وحيث أن المتبقي من طاقة أ٣ ٥٠٠ وحدة (١١٠٠ – ٦٠٠ خصصت للخلية أ٣ب٢) واحتياجات ب٣ ١٢٥٠ وحدة، إذن تخصص كل الـ ٥٠٠ وحدة للخلية أ٣ ب٣ وبذلك تستنفد كل طاقة أ٣.

٦- الانتقال بعد ذلك إلى أسفل لاستكمال احتياجات ب٣ من طاقة أ٤، وحيث أن طاقة أ٤ ١٢٥٠ وحدة وباقي احتياجات ب٣ ٧٥٠ وحدة (١٢٥٠٠ – ٥٠٠ خصصت للخلية أ٢ ب٣) فيتم تخصيص كل الـ ٧٥٠ وحدة للخلية أ٤ ب٣ وبذلك تستنفد كل طاقة أ٤ وتستكمل كل احتياجات ب٣. وبالتالي تستكمل احتياجات المنافذ.

وعلى ضوء ذلك فإن الحل المبدئي بإتباع طريقة الركن الشمالي الشرقي يظهر بالجدول التالي (٣/٨).

جدول (٣/٨) الحل المبدئي بطريقة الركن الشمالي الشرقي

المنافذ / المصانع	ب١	ب٢	ب٣	الطاقات
أ١	٣ / ٢٥٠٠	٧ / ٤٠٠	٢	٢٩٠٠
أ٢	٢	٥ / ٢٠٠٠	٥	٢٠٠٠
أ٣	٧	٢ / ٦٠٠	٤ / ٥٠٠	١١٠٠
أ٤	٦	٣	٥ / ٧٥٠	٧٥٠
الإجمالي	٢٥٠٠	٣٠٠٠	١٢٥٠	٦٧٥٠

يتضح من الجدول السابق (٣/٨) ما يلي:

١- تم البدء من الركن الشمالي الشرقي أي من الخلية أ١ ب١ بدون النظر إلى التكلفة، ثم تم الاتجاه إلى الجنوب الغربي في مسار على شكل سلم.

٢- تكاليف النقل وفقا لهذا الحل تتمثل في مجموع حاصل ضرب الكمية المنقولة إلى كل خلية في تكلفة نقل الوحدة إلى هذه الخلية ويمكن حسابها كما يلي: ٢٥٠٠ × ٢ + ٤٠٠ × ٧ + ٢٠٠٠ × ٥ + ٦٠٠ × ٢ + ٥٠٠ × ٤ + ٧٥٠ × ٥ = ٢٧٢٥٠ جنيه

٣- عدد الخلايا المشغولة (أي التي تم النقل إليها) ٦ خلايا، أي تساوى (م + ن – ١) يعنى تساوى عدد الصفوف + عدد الأعمدة – ١ بذلك يكون هذا الحل مسموح به أي ممكن اختبار مثاليته والوصول إلى حل أفضل منه إذا لم يكن هل حل أمثل.

ثانيا: طريقة أدنى تكلفة:

طبقا لهذه الطريقة يتم تخصيص طاقات المصادر لمنافذ التوزيع المختلفة مع الأخذ في الاعتبار تكلفة النقل، لذلك فيتم البدء بالتخصيص للخلية ذات أقل تكلفة نقل في حدود طاقة المصدر واحتياجات المنفذ أيهما أقل، ثم الانتقال إلى الخلية التي تكبرها مباشرة في تكلفة النقل، وهكذا حتى يتم تخصيص كل طاقات المصادر إلى جميع منافذ التوزيع.

هذا ويمكن توضيح ذلك بالتطبيق على بيانات المثال السابق (٢/٨) وذلك على النحو التالي:

١- بفحص تكلفة النقل للخلايا في جدول (٢/٨) يتضح أن أقل تكلفة نقل في الجدول قدرها ٢ جنيه، ولكن توجد أكثر من خلية لها نفس التكلفة، وهي الخلايا أ$_{١}$ ب$_{٣}$، أ$_{٢}$ب$_{١}$، أ$_{٣}$ ب$_{٢}$، وفي هذه الحالة يمكن البدء بالتخصيص لأي خلية منهم ولكن للوصول إلى الحل الأمثل بصورة أسرع ولتقليل عدد المحالات والجداول لتحسين الحل فإنه يمكن البدء بالتخصيص للخلية التي تستوعب أكبر عدد من الوحدات من بين هذه الخلايا الثلاثة، ثم العودة للخلايا (التي لها نفس التكلفة) وتخصص لها احتياجاتها إذا كان يمكن ذلك، أي إذا كان شغل الخلية التي تستوعب وحدات أكثر لم يؤثر على إمكانية شغل هذه الخلايا.

ومن فحص الجدول (٢/٨) يتضح أن:

الخلية أ$_{١}$ ب$_{٣}$ يمكن أن تخصص لها ١٢٥٠ احتياجات المنفذ ب$_{٣}$.

الخلية أ$_{٢}$ ب$_{١}$ يمكن أن تخصص لها ٢٠٠٠ وحدة وهي طاقة المصدر أ$_{٢}$.

الخلية أ$_{٣}$ ب$_{٢}$ يمكن أن تخصص لها ١١٠٠ وحدة وهي طاقة المصدر أ$_{٣}$.

إذن يتم البدء بالتخصيص للخلية أ$_{٢}$ ب$_{١}$ وتخصص لها ٢٠٠٠ وحدة وحيث أن الخلية أ$_{١}$ ب$_{٢}$ لم تتأثر بملء أ$_{٣}$ ب$_{١}$ لذلك تخصص لها ١٢٥٠ وحدة وكذلك تخصص للخلية أ$_{٣}$ ب$_{٢}$ ١١٠٠ وحدة.

٢- الانتقال بعد ذلك إلى الخلية أ$_{١}$ ب$_{١}$، والخلية أ$_{٤}$ ب$_{٤}$ حيث أن تكلفة النقل لهما متساوية وقدرها ٣ جنيه، وبفحص كل خلية لتحديد الكمية التي يمكن نقلها إلى كل منهما، يتضح أن الخلية أ$_{١}$ ب$_{١}$ يمكن أن تخصص لها ٥٠٠ وحدة فقط حيث أن احتياجات ب$_{١}$ ٢٥٠٠ وحدة تم تخصيص ٢٠٠٠ وحدة للخلية أ$_{٢}$ ب$_{١}$ فيكون الباقي ٥٠٠ فقط، أما الخلية أ$_{٤}$ ب$_{٢}$ فإن أقصى كمية يمكن تخصيصها لها فهي ٧٥٠ وحدة طاقة المصدر أ$_{٤}$. لذلك تخصص ٧٥٠ وحدة للخلية أ$_{٤}$ ب$_{٢}$ ثم تخصص ٥٠٠ وحدة للخلية أ$_{١}$ ب$_{١}$ لأن ملء إحداهما لا يؤثر على الأخرى.

٣- الانتقال بعد ذلك إلى الخلية أ$_{٣}$ ب$_{٣}$ حيث أن تكلفة النقل لها ٤ جنيه، ولكن يتضح أن احتياجات ب$_{٣}$ قد استكملت بملء الخلية أ$_{١}$ ب$_{٣}$ (في الخطوة ١) وكذلك طاقة المصدر أ$_{٣}$ قد استنفدت أيضا بملء الخلية أ$_{٣}$ ب$_{٢}$ (في الخطوة ١) لذلك لا تخصص للخلية أ$_{٣}$ ب$_{٣}$ أي كمية.

٤- بعد ذلك يتم الانتقال إلى الخلايا أ$_{٢}$ ب$_{٢}$، أ$_{٢}$ ب$_{٣}$، أ$_{٤}$ ب$_{٣}$، وتكلفة النقل إلى كل منها ٥ جنيه، ولكن بفحص هذه الخلايا يتضح أنه لا يمكن أن تخصص لها أي كمية نظرا لاكتمال طاقة اعتمدتها (الخلية أ$_{٢}$ ب$_{٣}$) أو صفوفها (الخلية أ$_{٢}$ ب$_{٢}$) أو اعتمدتها وصفوفها (الخلايا أ$_{٢}$ ب$_{٣}$، أ$_{٤}$ ب$_{٣}$).

٥- الانتقال بعد ذلك إلى الخلية أ$_{٤}$ ب$_{١}$ وتكلفة النقل إليها ٦ جنيه، ولكن بفحصها يتضح أنه لا يمكن النقل إليها لاكتمال طاقة صفها وعمودها.

٦- تبقي بعد ذلك الخلية أ$_{١}$ ب$_{٢}$ وتكلفة النقل إليها ٧ جنيه، ولا خيار سوى شغلها بالكمية الباقية من المصدر أ$_{١}$ وقدرها ١١٥٠ وحدة وهي تمثل في نفس الوقت الكمية اللازمة لاستكمال احتياجات المنفذ ب$_{٢}$.

بذلك يكون قد تم تخصيص كل طاقات المصانع لسد احتياجات جميع منافذ التوزيع ويكون جدول الحل المبدئي كما يلي (جدول ٤/٨).

جدول (٤/٨) الحل المبدئي بطريقة أدنى تكلفة

المنافذ / المصانع	ب١	ب٢	ب٣	الطاقات
أ١	٣ / ٥٠٠	٧ / ١١٥٠	٢ / ١٢٥٠	٢٩٠٠
أ٢	٢ / ٢٠٠٠	٥	٥	٢٠٠٠
أ٣	٧	٢ / ١١٠٠	٤	١١٠٠
أ٤	٦	٣ / ٧٥٠	٥	٧٥٠
الإجمالي	٢٥٠٠	٣٠٠٠	١٢٥٠	٦٧٥٠

يتضح من الجدول السابق (٤/٨) ما يلي:

- عدد الخلايا المشغولة = عدد الصفوف + عدد الأعمدة ــ ١

  ٦ = ٤ + ٣ ــ ١

أي أن هذا الحل يعتبر حلا ممكنا

- تكلفة النقل طبقا لهذا الحل تحسب كما يلي:

٥٠٠ × ٣ + ١١٥٠ × ٧ + ١٢٥٠ × ٢ + ٢٠٠٠ × ٢ + ١١٠٠ × ٢ + ٧٥٠ × ٣ = ٢٠٥٠٠ جنيه

- بمقارنة التكلفة الكلية للحل المبدئي بإتباع طريقة أدنى تكلفة يتضح أنها (٢٠٥٠٠ جنيه) أقل من التكلفة الكلية للحل المبدئي بإتباع طريقة الركن الشمالي الشرقي حيث كانت ٢٧٢٥٠ جنيه، وهذا يرجع إلى أن طريقة الركن الشمالي الشرقي لا تأخذ في الاعتبار تكلفة النقل.

ثالثا: طريقة فوجل التقريبية:

تتميز طريقة فوجل التقريبية مثل سابقتها (طريقة أدنى تكلفة) بأنها تأخذ في الاعتبار تكلفة النقل عند إعداد الحل المبدئي غير أنها تتميز عنها في أنها

(عادة) توصل إلى حل مبدئي لمشكلة النقل أقرب إلى الحل الأمثل. أي أنه للوصول إلى الحل الأمثل نحتاج لخطوات وجداول أقل (بعد إعداد الحل المبدئي) مما نحتاج إليه في حالة إتباع الطريقتين السابقتين.

هذا وفيما يلي توضيح للخطوات الرئيسية لطريقة فوجل التقريبية:

١- حيث أن هذه الطريقة تقوم على أساس حساب الفروق بين أصغر قيمة (تكلفة) والقيمة (التكلفة) التي تليها بالنسبة لكل صف ولكل عمود وتسجيل القيمة (فرق التكلفة) مقابل كل صف وكل عمود، فإن ذلك يتطلب عمودا هامشيا لتسجيل فروق الصفوف وصفا هامشيا لتسجيل فروق الأعمدة.

٢- يتم حساب الفرق بين أقل تكلفة نقل والتكلفة التي تليها مباشرة في كل صف وكذلك بالنسبة لكل عمود، ثم تسجل فروق التكلفة في العمود والصف اللذين أضيفا إلى جدول النقل لهذا الغرض.

٣- تحديد العمود أو الصف صاحب أكبر فرق تكلفة (في حالة تساوى أكثر من عمود أو أكثر من صف أو صف وعمود في أكبر فرق تكلفة يتم اختيار أحدهم عشوائيا) ثم يتم البحث عن الخلية ذات أقل تكلفة نقل في هذا الصف أو العمود صاحب أكبر فرق تكلفة، ثم يتم تخصيص أكبر كمية ممكنة لهذه الخلية في حدود طاقة المصدر واحتياجات المنفذ أيهما أقل، ويتم خصم الكمية التي تم تخصيصها لهذه الخلية من الكميات المطلوبة (الاحتياجات) ومن الكميات المنتجة (الطاقات).

٤- يشطب العمود الذي يتم تلبية كل احتياجاته أو الصف الذي تم استنفاد كل طاقاته.

هذا وفي حالة تلبية احتياجات عمود واستنفاد طاقة صف في وقت واحد، لا يتم شطبهما معا، بل يشطب أحدهما ويخصص للأخر قيمة صفرية في خانة الطلب أو في خانة العرض، ولا يستخدم الصف أو العمود الذي عينت له قيمة صفرية في حساب الفروق بعد ذلك.

وهناك حل آخر في حالة اكتمال احتياجات عمود واستنفاد طاقة صف في وقت واحد ويتمثل هذا الحل في البحث عن الخلية التي لها أقل تكلفة في الصف أو العمود الذي لم يشطب ثم تخصص قيمة صفرية لها ثم يشطب هذا الصف أو العمود ويتم إعادة تصوير جدول النقل بعد شطب العمود أو الصف الذي تقرر شطبه.

٥- يتم تكرار الخطوات السابقة من الخطوة (٢) حتى الخطوة (٤) حتى يتم تخصيص طاقات المصادر إلى المنافذ المختلفة. هذا وإذا تبقي بعد الخطوة (٤) السابقة عمود واحد (وعدة صفوف) أو صف واحد (وعدة أعمدة) فلا داعي لحساب الفروق، بل يتم تخصيص الكميات الباقية للخلايا غير المشغولة في هذا الصف أو هذا العمود حسب الترتيب التصاعدي لتكلفة النقل في هذه الخلايا.

ولتوضيح هذه الخطوات يمكن الاسترشاد ببيانات المثال السابق (٢/٨) وذلك على النحو التالي):

١ – إعداد جدول فروق تكاليف النقل كما يظهر بالجدول التالي (٥/٨).

جدول (٥/٨) النقل والفروق الأولي

المنافذ / المصانع	ب١	ب٢	ب٣	الطاقات	فروق الصفوف
أ١	٣	٧	٢	٢٩٠٠	١
أ٢	٢ ٢٠٠٠	٥	٥	٢٠٠٠ (٢٠٠٠)	③ ←
أ٣	٧	٢	٤	١١٠٠	٢
أ٤	٦	٣	٥	٧٥٠	٢
الاحتياجات	٢٥٠٠ (٢٠٠٠)	٣٠٠٠	١٢٥٠	٦٧٥٠	
فروق الأعمدة	١	١	٢		

٢ ـ تحديد العمود أو الصف صاحب أكبر فرق تكلفة وإجراء التخصيص، وبفحص الفروق كما تظهر بالجدول السابق (٥/٨) يتضح أن أكبر فرق هو ٣ ويوجد أمام الصف الثاني ($أ_٢$) وبفحص خلايا هذا الصف يلاحظ أن الخلية ($أ_١$ $ب_١$) تحتوى على أقل تكلفة نقل في هذا الصف، وبالتالي يتم تخصيص أكبر كمية ممكنة لهذه الخلايا، وقدرها ٢٠٠٠ وحدة حيث أن طاقة المصدر $أ_١$ ٢٠٠٠ وحدة في حين أن احتياجات المنفذ $ب_١$ ٢٥٠٠ وحدة.

يتضح من نتيجة هذا التخصيص استنفاد كل طاقة المصدر $أ_٢$ وعلى ذلك يشطب الصف الثانى من الجدول ويظهر العمود الأول $أ_١$ بالباقي من احتياجاته وهو ٥٠٠ وحدة (٢٥٠٠ ـ ٢٠٠٠).

٣ ـ يعاد تصوير جدول النقل من جديد (بعد استبعاد الصف الثاني وتغيير مجموع العمود الأول) وحساب الفروق من جديد بنفس الطريقة السابقة ويظهر جدول الفروق الجديد كما يلي جدول رقم (٦/٨).

جدول (٦/٨) النقل وحساب الفروق الثانية

المنافذ / المصانع	$ب_١$	$ب_٢$	$ب_٣$	الطاقات	فروق الصفوف
$أ_١$	٣ ٥٠٠	٧	٢	٢٩٠٠ (٥٠٠)	١
$أ_٣$	٧	٢	٤	١١٠٠	٢
$أ_٤$	٦	٣	٥	٧٥٠	٢
الاحتياجات	٥٠٠ (٥٠٠)	٣٠٠٠	١٢٥٠	٤٧٥٠	
فروق الأعمدة	③ ↑	١	٢		

يتضح من الجدول السابق (٦/٨) أن أكبر الفروق أمام العمود الأول (أ١) وبفحص خلايا هذا العمود يتضح أن الخلية أ١ ب١ لها أقل تكلفة نقل في هذا العمود، لذلك يخصص لها أقصى كمية ممكنة، وبفحص طاقة صفها أ١ واحتياجات عمودها ب١ يلاحظ أن طاقة أ١ ٢٩٠٠ وحدة في حين أن احتياجات ب١ ٥٠٠ وحدة فقط (حيث تم تخصيص ٢٠٠٠ وحدة من احتياجات العمود ب١) في الجدول السابق (٦/٨).

لذلك يتم تخصيص ٥٠٠ وحدة للخلية أ١ ب١، وبذلك تكتمل كل احتياجات ب١، وبذلك يشطب العمود الأول من الجدول وتخفض طاقة أ١ بمقدار ٥٠٠ وحدة وتصبح ٢٤٠٠ (٢٩٠٠ – ٥٠٠)، ويعد جدول النقل الجديد.

٤ - يعاد حساب فروق التكلفة من جديد وذلك بإعداد جدول جديد للفروق بعد استبعاد العمود الأول (ب١) وتعديل طاقة الصف الأول (أ١) ويكون هذا الجدول الجديد (٧/٨) على النحو التالي:

جدول (٧/٨) جدول النقل وحساب الفروق الثالثة

المنافذ / المصانع	ب١	ب٣	الطاقات	فروق الصفوف
أ١	٧ / ٥٠٠	٢ / ١٢٥٠	٢٤٠٠ (١٢٥٠)	⑤ ←
أ٣	٢	٤	١١٠٠	٢
أ٤	٣	٥	٧٥٠	٢
الاحتياجات	٣٠٠٠	١٢٥٠	٤٢٥٠ (١٢٥٠)	
فروق الأعمدة	١	٢		

يتضح من الجدول السابق (٧/٨) أن الصف الأول أ١ هو صاحب أكبر فرق تكلفة، وبفحص خلاياه يلاحظ أن الخلية أ١ ب٣ لها أقل تكلفة نقل، وبفحص طاقة صفها واحتياجات عمودها يتضح أن أقصى كمية يمكن تخصيصها لهذه الخلية هي ١٢٥٠ وحدة، وبذلك يتم استيفاء كل احتياجات المنفذ ب٣ ويتم شطبه من الجدول.

هذا وبشطب العمود الأول في الخطوة السابقة، وشطب العمود الثالث ب٣ في هذه الخطوة، يتبقي عمود واحد هو العمود الثاني ب٢، لذلك لا داعي لحساب الفريق ويتم التخصيص لخلايا هذا العمود وفق تكلفتها وفي حدود احتياجاتها.

يتم تخصيص ١١٠٠ وحدة للخلية أ٣ ب٢، ثم تخصيص ٧٥٠ وحدة للخلية أ٤ ب٢ وتتبقي بعد ذلك ١٥٠ وحدة. (٣٠٠٠ طاقة أ٢ – (١١٠٠ + ٧٥٠) تخصص للخلية أ١ ب٢.

وبذلك يكون قد تم تخصيص كل طاقات المصادر لتلبية احتياجات جميع المنافذ.

وعلى ضوء ذلك يمكن تصوير جدول الحل المبدئي طبقا لطريقة فوجل التقريبية وإظهار جميع الفروق التي سبق حسابها في الخطوات السابقة في الجدول (٨/٨) التالي:

جدول (٨/٨) الحل المبدئي بطريقة فوجل التقريبية

المنافذ / المصانع	ب١	ب٢	ب٣	الطاقات	فروق الصفوف
أ١	٣ / ٥٠٠	٧ / ١١٥٠	٢ / ١٢٥٠	٢٩٠٠	١ ← (٥)
أ٢	٢ / ٢٠٠٠	٥	٥	٢٠٠٠	(٣) -
أ٣	٧	٢ / ١١٠٠	٤	١١٠٠	٢ ٢ ٢
أ٤	٦	٣ / ٧٥٠	٥	٧٥٠	٢ ٢ ٢
الاحتياجات	٢٥٠٠	٣٠٠٠	١٢٥٠	٦٧٥٠	
فروق الأعمدة	١	١	٢		
	(٣)	١	٢		
	-	١	١		

يتضح من الجدول السابق (٨/٨) والذي يمثل الحل المبدئي بطريقة فوجل التقريبية ما يلي:

١ – تم استخدام ٦ خلايا (٦ متغيرات أساسية) وعلى ذلك يكون هذا الحل حلا ممكنا ومسموحا به لأنه يحقق القاعدة التي تقضي بضرورة أن يكون عدد الخلايا المشغولة يساوى عدد المصادر+ عدد المنافذ – ١.

٢ – تكلفة النقل طبقا لهذا الحل المبدئي تحسب كما يلي:

٥٠٠ × ٣ + ١١٥٠ × ٧ + ١٢٥٠ × ٢ + ٢٠٠٠ × ٢ + ١١٠٠ × ٢ + ٧٥٠ × ٣ = ٢٠٥٠٠ جنيه

هذا وبمقارنة تكلفة برنامج النقل المبدئي طبقا لطريقة فوجل بتكاليف برنامج الحل المبدئي بالطريقتين السابقتين يتضح أن طريقة فوجل تحقق أقل تكلفة وقدرها ٢٠٥٠٠ جنيه وتتساوى معها في التكلفة في هذا المثال طريقة التكلفة الدنيا (وليس بالضرورة أن يتحقق ذلك في جميع الحالات) في حين أن طريقة الركن الشمالي تعطي تكلفة أكبر وقدرها ٢٧٢٥٠ جنيه.

وبعد هذا فالسؤال الآن هو هل الحلول المبدئية السابق إعدادها بالطرق الثلاثة هي أفضل الحلول ولا توجد فرصة أو إمكانية لتخفيض التكاليف الكلية للنقل إلى أقل من ذلك؟ هذا ما سوف يتضح إن شاء الله في النقطة التالية الخاصة باختبار مثالية الحل.

٢/٢/١/٨ اختبار المثالية:

يقصد باختبار مثالية الحل التعرف على ما إذا كان هذا الحل هو الحل الأمثل أم أن هناك حل (أو حلول) أخر أفضل منه، وبعبارة أخرى تحديد ما إذا كان يمكن تخفيض التكلفة للنقل بملء خلية أو أكثر خلاف تلك الخلايا التي تم شغلها في الحل السابق (المبدئي) (أي إدخال متغيرات غير أساسية في الحل لتصبح متغيرات أساسية).

هذا ويتم فيما يلي إتباع طريقتين لاختبار مثالية الحل هما:

أولاً: طريقة حجر الوطء Stepping Stone Method.

ثانياً: طريقة التوزيع المعدل Modified Distribution Method.

أولا: طريقة حجر الوطء:

طبقا لهذه الطريقة يتم تقويم الخلايا الفارغة بتحديد تكلفة الفرصة المضاعة لكل خلية فارغة، فإذا كانت تكلفة الفرصة المضاعة لجمع الخلايا الفارغة سالبة أو صفر يكون الحل أمثل، أما إذا كانت تكلفة الفرصة لخلية أو أكثر من الخلايا الفارغة موجبة فإن الحل يكون غير أمثل، ويمكن تصميم حل أخر أفضل منه، وذلك باستخدام الخلية الفارغة ذات أكبر تكلفة فرصة مضاعة موجبة.

هذا ويمكن بلورة خطوات تطبيق طريقة حجر الوطء في اختبار المثالية كما يلي:

١ – تحديد المسار المغلق للخلايا الفارغة:

تتم عملية تقويم الخلايا الفارغة عن طريق تحديد مسار مغلق (أو طريق دائري) Closed Loop يبدأ من الخلية الفارغة التي يتم تقويمها وينتهي عندها، وعند تحديد المسار المغلق تراعي الاعتبارات التالية:

أ – يمر خط السير على خلايا مشغولة حتى يمكن نقل وحدات منها، ويكون عدد خلايا المسار المغلق عدد زوجي لا يقل عن أربع خلايا (٤، ٦، ٨) جميعها تكون مشغولة عدا الخلية التي يتم تقويمها.

ب –يمكن لخط السير أن يمر على خلايا مشغولة دون أن يخصم منها وذلك للحفاظ على توافر مجاميع الصفوف والأعمدة.

ج – لا يتم تقويم أكثر من خلية فارغة واحدة في آن واحد ولكن تقوم كل خلية فارغة على حدة.

د –يتم وضع إشارات موجبة وسالبة على التوالي في الخلايا المستخدمة في المسار المغلق على أن تكون إشارة الخلايا التي يتم النقل إليها موجبة والتي يتم النقل منها سالبة.

هـ - للحفاظ على توازن الصفوف والأعمدة فإنه إذا تم خصم وحدة من خلية مشغولة في أحد الأعمدة فإنه يجب أن تزداد خلية أخرى في نفس العمود بوحدة واحدة وكذلك بالنسبة للصفوف.

٢ -حساب تكلفة الفرصة المضاعة لكل خلية فارغة، وذلك بحساب التغيير في التكلفة المترتب على نقل وحدة واحدة لكل خلية فارغة.

٣ – اختبار مثالية الحل وذلك بفحص تكلفة الفرصة المضاعة لجميع الخلايا الفارغة، فإذا كانت تكلفة الفرصة المضاعة لجميع الخلايا الفارغة سالبة أو صفر يكون الحل أمثل، أي لم تعد هناك فرصة لتخفيض التكاليف، أما إذا كانت هناك خلية أو أكثر فارغة لها تكلفة فرصة مضاعة موجبة، فلا يكون الحل أمثل حيث مازالت هناك فرصة وإمكانية لتحسين الحل القائم، أي تخفيض التكاليف.

هذا ولتحسين الحل يتم ترشيح الخلية الفارغة التي لها أكبر تكلفة فرصة مضاعة موجبة للدخول في برنامج الحل الجديد. وفي حالة تساوى أكثر من خلية فارغة في تكلفة الفرصة المضاعة الموجبة، ثم اختيار احداها عشوائيا(١).

هذا ويمكن توضيح الخطوات السابقة بالتطبيق على الحل المبدئي السابق إعداده طبقا لطريقة الركن الشمالي الشرقي والذي يظهر في جدول (٣/٨).

بفحص جدول (٣/٨) يلاحظ أن الخلايا الفارغة هي:أ١ ب٣، أ٢ ب١، أ٢ ب٣، أ٣ ب١، أ٤ ب١، أ٤ ب٢

ولتقويم هذه الخلايا الفارغة يتم تحديد المسار المغلق لكل خلية مع الأخذ في الاعتبار الملاحظات السابق ذكرها فيما يتعلق بالمسار المغلق. فمثلا المسار المغلق للخلية أ٢ ب١ يتحدد كما يظهر بالجدول التالي (٩/٨).

---

(١) يمكن اختيار الخلية التي يمكن أن تخصص لها كمية أكبر من بين الخلايا المتساوية في تكلفة الفرصة المضاعة الموجبة وهذا الإجراء يؤدى إلى تقليل عدد الجداول التي يلزم إعدادها للتوصل إلى الحل الأمثل.

جدول (٩/٨) يوضح المسار المغلق للخلية أ٢ ب١

المنافذ / المصادر	ب١		ب٢	
	التكلفة	الكمية	التكلفة	الكمية
أ١	٣	٢٥٠٠ ١-	٧	٤٠٠ ١+
أ٢	٢	١+	٥	٢٠٠٠ ١-

يتضح من الجدول السابق (٩/٨) ما يلي:

١ –المسار المغلق للخلية أ٢ ب١ يتحدد على النحو التالي

أ٢ ب١ – أ١ ب١ + أ١ ب٢ – أ٢ ب٢

بدأ المسار المغلق بالخلية الفارغة أ٢ ب١ وانتهى بها وعدد خلاياه زوجي جمعيها مشغولة عدا الخلية أ٢ ب١. ويترتب على هذا المسار زيادة الخلية أ٢ ب١ بوحدة واحدة ونقص الخلية أ١ ب١ بوحدة واحدة وللحفاظ على توازن الصفوف والأعمدة تقل الخلية أ٢ ب٢ بوحدة واحدة وتزيد الخلية أ١ ب٢ بوحدة واحدة أيضا.

٢ –حيث أن نقل وحدة إلى خلية يؤدى إلى زيادة تكاليف النقل بمقدار تكلفة نقل واحدة إلى هذه الخلية وكذلك نقل وحدة من خلية يعنى تخفيض تكاليف النقل بمقدار تكلفة نقل وحدة لها. فإنه يمكن حساب أثر نقل وحدة إلى الخلية أ٢ ب١ (وفق المسار المغلق السابق تحديده) على تكلفة النقل كما يلي:

- إضافة وحدة إلى الخلية أ٢ ب١ يؤدى إلى زيادة التكاليف بمقدار = +٢.

- خصم وحدة من الخلية أ١ ب١ يؤدى إلى نقص التكاليف بمقدار = -٣.

- إضافة وحدة من الخلية أ١ ب٢ يؤدى إلى زيادة التكاليف بمقدار = +٧.

- خصم وحدة إلى الخلية أ٢ ب٢ يؤدى إلى نقص التكاليف بمقدار = -٥

الأثر النهائي على تكلفة النقل = +٢ – ٣ + ٧ – ٥ = +١

أي أن تكلفة الفرصة المضاعة للخلية أ$_{٢}$ ب$_{١}$ = -١

معنى ذلك أن نقل وحدة واحدة إلى الخلية أ$_{٢}$ ب$_{١}$ يؤدى إلى زيادة التكاليف الكلية للنقل بمقدار جنيه واحد. وذلك بالطبع ليس في صالح الشركة.

هذا ويمكن تقويم باقي الخلايا الفارغة في جدول (٨/٣) بنفس الطريقة السابقة ويوضح الجدول التالي (٨/١٠) ملخصا لنتائج تقويم هذه الخلايا الفارغة.

جدول (٨/١٠) يوضح المسار المغلق للخلايا الفارغة

الخلية الفارغة	المسار المغلق	التغير في التكلفة	تكلفة الفرصة
أ$_{١}$ ب$_{٣}$	+أ$_{١}$ ب$_{٣}$ – أ$_{٣}$ ب$_{٣}$ + أ$_{٣}$ ب$_{٢}$ – أ$_{١}$ ب$_{٢}$	+٢- ٤ + ٢ – ٧ = ٧-	٧
أ$_{٢}$ ب$_{١}$	+ أ$_{٢}$ ب$_{١}$ – أ$_{١}$ ب$_{١}$ + أ$_{١}$ ب$_{٢}$ – أ$_{٢}$ ب$_{٢}$	+٢ – ٣ + ٧ – ٥ = ١	١-
أ$_{٢}$ ب$_{٣}$	+ أ$_{٢}$ ب$_{٣}$ – أ$_{٣}$ ب$_{٣}$ + أ$_{٣}$ ب$_{٢}$ – أ$_{٢}$ب$_{٢}$	+٥ – ٤ + ٢ -٥ = ٢-	٢
أ$_{٣}$ ب$_{١}$	+ أ$_{٣}$ ب$_{١}$ – أ$_{١}$ ب$_{١}$ + أ$_{١}$ ب$_{٢}$ – أ$_{٣}$ ب$_{٢}$	+٧ – ٣ + ٧ – ٢ = ٩	٩-
أ$_{٤}$ ب$_{١}$	+ أ$_{٤}$ ب$_{١}$ – أ$_{١}$ ب$_{١}$ + أ$_{١}$ ب$_{٢}$ – أ$_{٣}$ ب$_{٢}$ + أ$_{٣}$ ب$_{٣}$ – أ$_{٤}$ ب$_{٣}$	+٦ -٣ + ٧ – ٢ +٤ – ٥ = ٧	٧-
أ$_{٤}$ ب$_{٢}$	+ أ$_{٤}$ ب$_{٢}$ – أ$_{٤}$ ب$_{٣}$ + أ$_{٣}$ ب$_{٣}$ – أ$_{٣}$ ب$_{٢}$	+٣ – ٥ + ٤ – ٢ = صفر	صفر

بفحص الجدول السابق (٨/١٠) يلاحظ ما يلي:

١ – توجد أكثر من خلية فارغة لها تكلفة فرصة موجبة (كما يظهر من عمود تكلفة الفرصة) ومعنى ذلك أن الحل المبدئي الظاهر بالجدول (٨/٣) ليس حل أمثل ويمكن تحسينه.

٢ – لتحسين الحل توجد أكثر من خلية فارغة يمكن استخدامها في التحسين، ومن عمود تكلفة الفرصة المضاعة يلاحظ وجود خليتين لهما تكلفة فرصة موجبة هما الخلية أ$_{١}$ ب$_{٣}$، الخلية أ$_{٢}$ ب$_{٣}$ وللمفاضلة بينهما يتم اختيار

الخلية أ١ ب٣لأن لها أكبر تكلفة فرصة موجبة وقدرها ٧ أي أن كل وحدة يمكن نقلها إلى الخلية أ١ ب٣ تخفض التكاليف الكلية للنقل بمقدار ٧ جنيه.

٣ – لتحسين الحل يتم إعداد حل جديد بإتباع الخطوات التالية:

أ – تحديد أثر النقل إلى الخلية أ١ ب٣ على خلايا المسار المغلق لها.

الخلية أ١ ب٣ = صفر + ٤٠٠ = ٤٠٠ وحدة

الخلية أ٣ ب٣ = ٥٠٠ – ٤٠٠ = ١٠٠ وحدة

الخلية أ٣ ب٢ = ٦٠٠ + ٤٠٠ = ١٠٠٠ وحدة

الخلية أ١ ب٢ = ٤٠٠ – ٤٠٠ = صفر

أما باقي خلايا الجدول فلا تتأثر وتظل كما هي:

ب – إعداد جدول النقل الجديد (الثاني) كما يظهر بالجدول التالي (١١/٨)

جدول (١١/٨) جدول النقل الثاني

المنافذ / المصانع	ب١	ب٢	ب٣	الطاقات
أ١	٣ / ٢٥٠٠	٧	٢ / ٤٠٠	٢٩٠٠
أ٢	٢	٥ / ٢٠٠٠	٥	٢٠٠٠
أ٣	٧	٢ / ١٠٠٠	٤ / ١٠٠	١١٠٠
أ٤	٦	٣	٥ / ٧٥٠	٧٥٠
الاحتياجات	٢٥٠٠	٣٠٠٠	١٢٥٠	٦٧٥٠

ج – تكلفة النقل للحل الثاني = ٢٥٠٠ × ٣ + ٤٠٠ × ٢ +٢٠٠٠ × ٥ + ١٠٠٠ × ٢ + ١٠٠ × ٤ + ٧٥٠ × ٥ = ٢٤٤٥٠ جنيه

أي أن البرنامج الثاني للنقل أدى إلى تخفيض تكاليف النقل بمقدار ٢٨٠٠ جنيه (٢٧٢٥٠ تكلفة الحل الأول – ٢٤٤٥٠٠ تكلفة الحل الثاني).

هذا ويمكن حساب مقدار التخفيض في تكلفة النقل بضرب الكمية التي تم نقلها إلى الخلية أ$_{١}$ ب$_{٣}$ في تكلفة الفرصة لهذه الخلية، أي تساوى ٤٠٠ وحدة × ٧ = ٢٨٠٠ جنيه.

اختبار مثالية جدول النقل الثاني:

بفحص جدول النقل السابق (١١/٨) يلاحظ أن عدد الخلايا المشغولة ٦ خلايا (أي يساوى عدد الصفوف + عدد الأعمدة – ١). ومعنى ذلك أن هذا الحل يعتبر حلا مسموحا به ويمكن اختبار مثالية.

ويوضح الجدول التالي (١٢/٨) نتيجة تقويم الخلايا الفارغة في الجدول السابق (١١/٨) وفقا لطريقة حجر الوطء.

جدول (١٢/٨) يوضح المسار المغلق للخلايا الفارغة

الخلية الفارغة	المسار المغلق	التغير في التكلفة	تكلفة الفرصة
أ$_{١}$ ب$_{٢}$	+أ$_{١}$ ب$_{٢}$ – أ$_{٣}$ ب$_{٢}$ + أ$_{٣}$ ب$_{٣}$ – أ$_{١}$ ب$_{٣}$	+٧ – ٢ + ٤ – ٢ = ٧	-٧
أ$_{٢}$ ب$_{١}$	+ أ$_{٢}$ ب$_{١}$ – أ$_{١}$ ب$_{١}$ + أ$_{١}$ ب$_{٣}$ – أ$_{٣}$ ب$_{٣}$ + أ$_{٣}$ ب$_{٣}$ – أ$_{٢}$ ب$_{٢}$	+٢ – ٣ + ٢ – ٤ + ٢ – ٥ = -٦	٦
أ$_{٢}$ ب$_{٣}$	+ أ$_{٢}$ ب$_{٣}$ – أ$_{٢}$ ب$_{٢}$ + أ$_{٣}$ ب$_{٢}$ – أ$_{٣}$ب$_{٣}$	+٥ -٥ + ٢ -٤ = -٢	٢
أ$_{٣}$ ب$_{١}$	+ أ$_{٣}$ ب$_{١}$ – أ$_{١}$ ب$_{١}$ + أ$_{١}$ ب$_{٣}$ – أ$_{٣}$ ب$_{٣}$	+٧ -٣ + ٢ – ٤ = ٢	٢
أ$_{٤}$ ب$_{١}$	+ أ$_{٤}$ ب$_{١}$ – أ$_{١}$ ب$_{١}$ + أ$_{١}$ ب$_{٣}$ – أ$_{٤}$ ب$_{٣}$	+٦ -٣ + ٢ – ٥ = صفر	صفر
أ$_{٤}$ ب$_{٢}$	+ أ$_{٤}$ ب$_{٢}$ – أ$_{٣}$ ب$_{٢}$ + أ$_{٣}$ ب$_{٣}$ – أ$_{٤}$ ب$_{٣}$	+٢ – ٢ + ٤ – ٥ = صفر	صفر

يتضح من الجدول السابق (١٢/٨) أن هناك أكثر من خلية فارغة لها تكلفة فرصة موجبة، وبذلك لا يكون الحل السابق (١١/٨) حل أمثل ولتحسينه يتم ترشيح الخلية أ$_{٢}$ ب$_{١}$ للدخول في الحل الجديد لأن لها أكبر تكلفة فرصة موجبة.

ولإدخال الخلية أ$_{٣}$ ب$_{١}$ في الحل الجديد تتبع الخطوات التالية:

أ – تحديد الكمية الممكن نقلها إلى الخلية $أ_٢$ $ب_١$

بفحص المسار المغلق للخلية $أ_١ب_٢$ يتضح أن الخلايا التي إشارتها سالبة في هذا المسار (يعنى الخلايا التي يتم النقل منها) هي الخلية $أ_١$ $ب_١$، الخلية $أ_٣$ $ب_٣$، والخلية $أ_٢$ $ب_٢$ وأقل كمية في هذه الخلايا الثلاثة هي ١٠٠ وحدة في الخلية $أ_٣$ $ب_٣$، وبذلك تكون أقصى كمية يمكن نقلها إلى الخلية $أ_٢$ $ب_١$ هي ١٠٠ وحدة.

ب – تحديد أثر النقل إلى الخلية $أ_٢$ $ب_١$ على خلايا المسار المغلق لها.

الخلية $أ_٢$ $ب_١$ = صفر + ١٠٠ = ١٠٠ وحدة

الخلية $أ_١$ $ب_١$ = ٢٥٠٠ – ١٠٠ = ٢٤٠٠ وحدة

الخلية $أ_١$ $ب_٣$ = ٤٠٠ + ١٠٠ = ٥٠٠ وحدة

الخلية $أ_٣$ $ب_٣$ = ١٠٠ – ١٠٠ = صفر وحدة

الخلية $أ_٣$ $ب_٢$ = ١٠٠٠ + ١٠٠ = ١١٠٠ وحدة

الخلية $أ_٢$ $ب_٢$ = ٢٠٠٠ – ١٠٠ = ١٩٠٠ وحدة

وهذا تظل باقي خلايا الجدول كما هي دون تغيير.

ج – إعداد جدول النقل الجديد (الثالث):

يوضح الجدول التالي (١٣/٨) الحل الثالث:

جدول (١٣/٨) جدول الحل الثالث

المنافذ / المصانع	$ب_١$	$ب_٢$	$ب_٣$	الطاقات
$أ_١$	(٣) ٢٤٠٠	(٧)	(٢) ٥٠٠	٢٩٠٠
$أ_٢$	(٢) ١٠٠	(٥) ١٩٠٠	(٥)	٢٠٠٠
$أ_٣$	(٧)	(٢) ١١٠٠	(٤)	١١٠٠
$أ_٤$	(٦)	(٣)	(٥) ٧٥٠	٧٥٠
الاحتياجات	٢٥٠٠	٣٠٠٠	١٢٥٠	٦٧٥٠

د – تكلفة النقل للحل الثالث:

= ٢٤٠٠ × ٣ + ٥٠٠ × ٢ + ١٠٠ × ٢ + ١٩٠٠ × ٥ + ١١٠٠ × ٢ + ٧٥٠ × ٥ = ٢٣٨٥٠ جنيه.

أي أن برنامج النقل الثالث أدى إلى تخفيض تكاليف النقل بمقدار ٦٠٠ جنيه (٢٤٤٥٠ تكلفة الحل الثاني- ٢٣٨٥٠ تكلفة الحل الثالث).

وهذا التخفيض يمكن حسابه عن طريق ضرب الكمية التي تم نقلها إلى الخلية أ٢ ب١ في تكلفة الفرصة المضاعة لهذه الخلية، أي ١٠٠ وحدة × ٦ = ٦٠٠ جنيه.

اختبار مثالية الحل الثالث:

بفحص جدول النقل السابق (١٣/٨) يلاحظ أن عدد الخلايا المشغولة ٦ خلايا (أي يساوى عدد الصفوف + عدد الأعمدة – ١)، وهذا يعنى أن هذا الحل يعتبر حلا مسموحا به ويمكن اختبار مثاليته.

يوضح الجدول التالي (١٤/٨) نتيجة تقويم الخلايا الفارغة في الجدول السابق (١٣/٨) وفقا لطريقة حجر الوطء.

الخلية	المسار المغلق	التغير في التكلفة	تكلفة الفرصة
أ١ ب٢	+أ١ ب٢ – أ١ ب١ + أ٢ ب١ – أ٢ ب٢	+٧-٣+٢-٥ = ١	١-
أ٢ ب٣	+ أ٢ ب٣ – أ١ ب٣ + أ١ ب١ – أ٢ ب١	+٥ – ٢+ ٣ – ٢ = ٤	٤-
أ٣ ب١	+ أ٣ ب١ – أ٢ ب١ + أ٢ ب٢ – أ٣ب٢	+٧ – ٢ + ٥ – ٢ = ٨	٨-
أ٣ ب٣	+ أ٣ ب٣– أ١ ب٣ + أ١ ب١ + أ٢ب٢ - – أ٣ ب٢	+٤ – ٢ + ٣- ٢ + ٥ -٢ = ٦	٦-
أ٤ ب١	+ أ٤ ب١ – أ١ ب١ + أ١ ب٣ – أ٤ ب٣	+٦ – ٣ + ٢ – ٥ = صفر	صفر
أ٤ ب٢	+ أ٤ ب٢ – أ٤ ب٢ + أ٢ ب١ – أ٢ ب٢ + أ١ ب٣ – أ١ ب١	+٣ – ٥ + ٢ -٥ + ٢ – ٣ = -٦	٦+

يتضح من الجدول السابق (١٤/٨) أن تكلفة الفرصة المضاعة للخلية أ٤ ب٢ موجبة، وبذلك يكون الحل السابق (جدول ١٣/٨) ليس حل أمثل ولتحسينه يتم إدخال الخلية أ٤ ب٢ في الحل وذلك على النحو التالي:

أ – تحديد الكمية الممكن نقلها إلى الخلية أ$_{٤}$ ب$_{٢}$.

بفحص المسار المغلق للخلية أ$_{٤}$ ب$_{٢}$ يتضح أن الخلايا التي إشارتها سالبة في هذا المسار (يعنى الخلايا التي يتم النقل منها) هي الخلايا أ$_{٤}$ ب$_{٣}$، أ$_{٢}$ ب$_{٢}$، أ$_{١}$ ب$_{١}$، وأقل كمية في هذه الخلايا الثلاثة هي ٧٥٠ وحدة، إذن يتم نقل ٧٥٠ وحدة إلى الخلية أ$_{٤}$ ب$_{٢}$.

ب –تحديد أثر النقل إلى الخلية أ$_{٤}$ ب$_{٢}$ على خلايا المسار المغلق لها.

الخلية أ$_{٤}$ ب$_{٢}$ = صفر + ٧٥٠ = ٧٥٠ وحدة

الخلية أ$_{٤}$ ب$_{٣}$ = ٧٥٠ – ٧٥٠ = صفر وحدة

الخلية أ$_{٢}$ ب$_{١}$ = ١٠٠ + ٧٥٠ = ٨٥٠ وحدة

الخلية أ$_{٢}$ ب$_{٢}$ = ١٩٠٠ – ٧٥٠ = ١١٥٠ وحدة

الخلية أ$_{١}$ ب$_{٣}$ = ٥٠٠ + ٧٥٠ = ١٢٥٠ وحدة

الخلية أ$_{١}$ ب$_{١}$ = ٢٤٠٠ – ٧٥٠ = ١٦٥٠ وحدة

هذا وتظل باقي خلايا الجدول كما هي دون تغيير.

جدول (١٥/٨)

يوضح الحل الرابع

المنافذ / المصانع	ب$_{١}$	ب$_{٢}$	ب$_{٣}$	الطاقات
أ$_{١}$	٣ / ١٦٥٠	٧	٢ / ١٢٥٠	٢٩٠٠
أ$_{٢}$	٢ / ٨٥٠	٥ / ١١٥٠	٥	٢٠٠٠
أ$_{٣}$	٧	٢ / ١١٠٠	٤	١١٠٠
أ$_{٤}$	٦	٣ / ٧٥٠	٥	٧٥٠
الاحتياجات	٢٥٠٠	٣٠٠٠	١٢٥٠	٦٧٥٠

د ـ تكلفة النقل للحل الرابع.

= ١٦٥٠ + ٣ + ١٢٥٠ × ٢ + ٨٥٠ × ٢ + ١١٥٠ × ٥ + ١١٠٠ × ٢ + ٧٥٠ × ٣ = ١٩٣٥٠ جنيه.

يتضح من ذلك أن برنامج النقل الرابع يخفض تكلفة النقل بمقدار ٤٥٠٠ جنيه (٢٣٨٥٠ تكلفة الحل الثالث ـ ١٩٣٥٠ تكلفة الحل الرابع). وهذا التخفيض يتمثل في تكلفة الفرصة المضاعة للكمية التي تم نقلها للخلية أ$_{٤}$ ب$_{٣}$. (وهي ٦ × ٧٥٠ وحدة).

اختبار المثالية الحل الرابع:

حيث أن عدد الخلايا المشغولة في الجدول السابق (١٥/٨) ٦ خلايا فإن هذا الحل يعتبر حلا مسموحا به ويمكن اختبار مثاليته.

ويوضح الجدول التالي (١٦/٨) نتيجة تقويم الخلايا الفارغة في الجدول السابق (١٥/٨) وفقا لطريقة حجر الوطء.

الخلية	المسار المغلق	التغير في التكلفة	تكلفة الفرصة
أ$_{١}$ ب$_{٢}$	+أ$_{١}$ ب$_{٢}$ ــ أ$_{١}$ ب$_{١}$ + أ$_{٢}$ ب$_{١}$ ــ أ$_{٢}$ ب$_{٢}$	+٧-٣+٢-٥ = ١	١-
أ$_{٢}$ ب$_{٣}$	+ أ$_{٢}$ ب$_{٣}$ ــ أ$_{٢}$ ب$_{١}$ + أ$_{١}$ ب$_{١}$ ــ أ$_{١}$ ب$_{٣}$	+٥ ــ ٢ + ٣ ــ ٢ = ٤	٤-
أ$_{٣}$ ب$_{١}$	+ أ$_{٣}$ ب$_{١}$ ــ أ$_{٢}$ ب$_{١}$ + أ$_{٢}$ ب$_{٢}$ ــ أ$_{٣}$ ب$_{٢}$	+٧ ــ ٢ + ٥ ــ ٢ = ٨	٨-
أ$_{٣}$ ب$_{٣}$	+ أ$_{٣}$ ب$_{٣}$ ــ أ$_{٣}$ ب$_{٢}$ + أ$_{٢}$ ب$_{١}$ + أ$_{١}$ب$_{١}$ - ــ أ$_{١}$ ب$_{٤}$	+٤ -٢ + ٥ ــ ٢ + ٣ ــ ٢ = ٦	٦-
أ$_{٤}$ ب$_{١}$	+ أ$_{٤}$ ب$_{١}$ ــ أ$_{١}$ ب$_{١}$ + أ$_{٢}$ ب$_{٣}$ ــ أ$_{٤}$ ب$_{٢}$	+٦ ــ ٢ + ٥ ــ ٣ = ٦	٦-
أ$_{٤}$ ب$_{٣}$	+ أ$_{٤}$ ب$_{٣}$ ــ أ$_{٤}$ ب$_{٢}$ + أ$_{٢}$ ب$_{٢}$ ــ أ$_{٢}$ ب$_{١}$ + أ$_{١}$ ب$_{٤}$ ــ أ$_{١}$ ب$_{٣}$	+٥ ــ ٣ + ٥ ــ ٢ +٣ ــ ٢ = ٦	٦-

يتضح من الجدول السابق (١٦/٨) أن تكلفة الفرصة المضاعة لجميع الخلايا الفارغة سالبة أي لا توجد خلية فارغة لها تكلفة فرصة موجبة، وبذلك يكون الحل السابق (جدول الحل الرابع ١٦/٨) هو الحل الأمثل.

هذا وعلى ضوء جدول الحل الأمثل (١٦/٨) يكون برنـامج النقل الأمثل على النحو التالي:

- طاقة المصنع أ١ ينقل منها ١٦٥٠ وحدة لتلبيـة احتياجـات المنفذ ب١، ١٢٥٠ لتلبية المنفذ ب٣.
- طاقة المصنع الثاني أ٢ ينقل منـها ٨٥٠ وحـدة لتلبيـة احتياجـات المنفذ ب١، ١١٥٠ وحدة لتلبية احتياجات المنفذ ب٢.
- طاقة المصنع الثالث أ٣ تنقل بالكامل لتلبية احتياجات المنفذ ب٢.
- طاقة المصنع الرابع أ٤ تنقل بالكامل لتلبية احتياجات المنفذ ب٢.
- وتكون تكلفة النقل وفقا لهذا البرنـامج ١٩٣٥٠ جنيه.

ثانيا: طريقة التوزيع المعدل:

يتضح مما سبق (في طريقة حجر الوطء) أنه لتقويم الخلايا الفارغة فإنه يلزم حساب تكلفـة الفرصـة المضـاعة لكل خليـة فارغـة، وذلـك بتحديـد المسـار المغلق لكل خلية فارغة وحساب الأثـر علـى التكلفـة، وتنفيذ ذلـك يتطلـب جهـدا ووقتا ليس بالقصير، لذا فإن طريقة التوزيـع المعدل تحـاول تجنـب ذلـك، وذلـك بعدم تحديـد المسـار المغلـق لجميـع الخلايـا الفارغـة، بـل يـتم الاكتفـاء بتحديـد المسار المغلق لخلية واحدة وهي الخليـة الفارغـة المرشـحة للـدخول فـي الحـل الجديد.

هذا ويمكن توضيح خطوات تطبيـق طريقـة التوزيـع المعدل علـى النحـو الآتـي:

١ ــ حساب قيم الصفوف وقيم الأعمدة:

حيث أن طريقة النقل تعتبر طريقة خاصة من طرق البرمجة الخطية فـإن نفس المبادئ والقواعد التي تنطبق في حالة استخدام طريقة السمبلكس يمكـن تطبيقها في حالـة استخدام طريقـة النقل، ولمـا كانـت تكلفـة الفرصـة المضـاعة (أسعار الظل في صف التقويم النـهائي) للمتغيرات الأساسية (الممثلة في الحل) تساوى صفر وذلك في حالـة إتباع طريقة السمبلكس، فإنـه بـنفس المنطـق فـإن

الخلايا المشغولة في طريقة النقل تمثل المتغيرات الأساسية، وبالتالي فإن تكلفة الفرصة المضاعة لكل خلية مشغولة تكون صفر.

وطبقا للقاعدة التي تقضي بأن يكون عدد الخلايا المشغولة يساوى عدد الصفوف + عدد الأعمدة – ١ فإنه لابد من وجود خلية مشغولة على الأقل في كل صف وفي كل عمود وعلى ضوء ذلك يمكن تقدير قيم الصفوف وقيم الأعمدة وفقا للمعادلة الآتية:

تكلفة الخلية المشغولة (ت) = قيمة صفها (ف) + قيمة عمودها (ع)

أى أن ت = ف + ع (١)

أو ف + ع – ت = صفر

ولحساب قيم الصفوف وقيم الأعمدة وفقا لهذه المعادلة يتم تعيين قيمة صفر لأي صف أو أي عمود يتم اختياره عشوائيا[1]، ويتطلب حساب قيم الصفوف وقيم الأعمدة إضافة صف جديد لحساب قيم الأعمدة وعمود جديد لحساب قيم الصفوف.

٢ –حساب تكلفة الفرصة المضاعة للخلايا الفارغة (ص).

باستخدام المعادلة السابقة (رقم ١) يمكن حساب تكلفة الفرصة المضاعة للخلية الفارغة (المتغير غير الأساس) وفقا للمعادلة الآتية:

تكلفة الفرصة المضاعة للخلية الفارغة (ص)

= قيمة صفها (ف) + قيمة عمودها (ع) – تكلفتها (ت)

أو ص = ف + ع – ت (٢)

٣ – تقويم الحل وتحديد الخلية الفارغة المرشحة للدخول في الحل المبدئي الجديد وهي الخلية الفارغة صاحبة أكبر تكلفة فرصة مضاعة موجبة.

٤ – تحديد المسار المغلق للخلية الفارغة المرشحة للدخول في الحل.

٥ – تصميم جدول الحل الجديد وحساب تكلفة النقل.

٦ – تكرار الخطوات السابقة (١ حتى ٥) حتى يتم التوصل إلى الحل الأمثل.

---

(١) للتسهيل يمكن تعيين الصفر للصف أو العمود الذي به أكبر عدد من الخلايا المشغولة بالجدول.

هذا ويمكن تطبيق هذه الخطوات باستخدام بيانات جدول الحل المبدئي السابق إعداه طبقا لطريقة فوجل التقريبية[1]جدول (٨/٨) وذلك على النحو الآتي:

١- حساب قيم الصفوف وقيم الأعمدة:

يظهر من جدول (٨/٨) وجود ٦ خلايا مشغولة يمكن استخدام تكلفتها في حساب قيم الصفوف وقيم الأعمدة. وبفرض أن قيمة الصف الأول ($ف_١$) = صفر . وبتطبيق المعادلة ت = ف + ع فإنه يمكن حساب قيم الصفوف وقيم الأعمدة كما يلي:

$ت_{١١} = ف_١ + ع_١$

$٣ = صفر + ع_٢$ $\therefore ع_١ = ٣$

$ت_{٢١} = ف_١ + ع_٢$

$٧ = صفر + ع_٣$ $\therefore ع_٢ = ٧$

$ت_{٣١} = ف_١ + ع_٣$

$٢ = صفر + ع_٣$ $\therefore ع_٣ = ٢$

$ت_{١٢} = ف_٢ + ع_١$

$٢ = ف_٢ + ٣$ $\therefore ف_٢ = -١$

$ت_{٢٣} = ف_٣ + ع_٢$

$٢ = ف_٣ + ٥$ $\therefore ف_٣ = -٥$

$ت_{٢٤} = ف_٤ + ع_٣$

$٣ = ف_٤ + ٧$ $\therefore ف_٤ = -٤$

وعلى ذلك فإن:

قيم الصفوف هي $ف_١$ = صفر، $ف_٢ = -١$، $ف_٣ = -٥$، $ف_٤ = -٤$

قيم الأعمدة هي = $ع_١ = ٣$، $ع_٢ = ٧$، $ع_٣ = ٢$،

(١) يمكن تطبيق التوزيع المعدل (وكذلك طريقة حجر الوطء) على أي جدول نقل يراد اختبار مثاليته سواء كان حلا مبدئيا أو غير مبدئي، وسواء تم إعداد الحل المبدئي بطريقة فوجل التقريبية أو بغيرها من طرق إعداد الحل المبدئي.

هذا ويبدو من المناسب الإشارة إلى أنه إذا تم تعيين قيمة صفر لصف آخر خلاف الصف (ف$_{١}$) أو لأي عمود فسوف يتم التوصل إلى قيم للصفوف وللأعمدة قد تختلف عن القيم السابق التوصل إليها غير أن تكلفة الفرصة للخلايا الفارغة سوف لا تتأثر، أي أن تكلفة الفرصة للخلايا الفارغة لا تتأثر باختلاف قيم الصفوف وقيم الأعمدة.

هذا وتظهر بيانات الجدول (٨/٨) بعد إضافة عمود قيم الصفوف وقيم الأعمدة في الجدول التالي (١٧/٨).

	قيم الأعمدة	ع$_{١}$ = ٣	ع$_{٢}$ = ٧	ع$_{٣}$ = ٢	
قيم الصفوف	المنافذ / المصانع	ب$_{١}$	ب$_{٢}$	ب$_{٣}$	الطاقات
ف$_{١}$ = صفر	أ$_{١}$	٣ ٥٠٠	٧ ١١٥٠	٢ ١٢٥٠	٢٩٠٠
ف$_{٢}$ = -١	أ$_{٢}$	٢ ٢٠٠٠	٥	٥	٢٠٠٠
ف$_{٣}$ = -٥	أ$_{٣}$	٧	٢ ١١٠٠	٤	١١٠٠
ف$_{٤}$ = -٤	أ$_{٤}$	٦	٣ ٧٥٠	٥	٧٥٠
	الاحتياجات	٢٥٠٠	٣٠٠٠	١٢٥٠	٦٧٥٠

٢ – حساب تكلفة الفرصة المضاعة للخلايا الفارغة:

تحسب تكلفة الفرصة المضاعة للخلايا الفارغة وفقا للمعادلة الآتية:

ص = ف + ع – ت

ص$_{٢٢}$= ف$_{٢}$ + ع$_{٢}$ – ت$_{٢٢}$

$= -١ + ٧ - ٥ = ١$

$ص_{٣٢} = ف_{٢} + ع_{٣} - ت_{٣٢}$

$= -١ + ٢ - ٥ = -٦$

$ص_{١٣} = ف_{٢} + ع_{١} - ت_{١٣}$

$= -٥ + ٣ - ٧ = -٩$

$ص_{٣٣} = ف_{٣} + ع_{٣} - ت_{٣٣}$

$= -٥ + ٢ - ٤ = -٧$

$ص_{١٤} = ف_{٤} + ع_{١} - ت_{١٤}$

$= -٤ + ٣ - ٦ = -٧$

$ص_{٣٤} = ف_{٤} + ع_{٤} - ت_{٣٤}$

$= -٤ + ٢ - ٥ = -٧$

٣ – تقويم الحل واقتراح التغييرات اللازمة:

يتضح مما سبق أن تكلفة الفرصة المضاعة للخلية $أ_{٢}$ $ب_{٢}$ موجبة وهذا يعنى أن هذا حل غير أمثل ولتحسين هذا الحل فإنه يلزم إدخال الخلية $أ_{٢}$ $ب_{٢}$ في الحل.

٤ – تحديد المسار المغلق للخلية المرشحة للدخول في الحل:

يتم تحديد المسار المغلق للخلية $أ_{٢}$ $ب_{٢}$ بنفس الطريقة السابق توضيحها عند تطبيق طريقة حجر الوطء.

وعلى ضوء بيانات الجدول السابق (١٧/٨) يكون المسار المغلق للخلية الفارغة $أ_{٢}$ $ب_{٢}$ كما يلي:

+ $أ_{٢}$ $ب_{٢}$ – $أ_{٢}$ $ب_{١}$ + $أ_{١}$ $ب_{١}$ – $أ_{١}$ $ب_{٢}$

هذا وتتحدد الكمية التي يمكن نقلها إلى الخلية $أ_{١}$ $ب_{٢}$ (كما هو الحال عند تطبيق طريقة حجر الوطء) بأقل كمية في الخلايا المسموح بالنقل منها للخلية $أ_{٢}$ $ب_{٢}$ (أي الخلايا التي إشارتها سالبة في المسار المغلق لها) وهي الخلية

أ$_{٢}$ب$_{١}$ وبها ١١٥٠ وحدة وبالتالي فإن أقصى كمية نقلها إلى الخلية أ$_{٢}$ ب$_{٢}$ هي ١١٥٠ وحدة.

وبذلك تكون الكميات بالخلايا التي تأثرت بهذا التغيير كما يلي:

أ$_{٢}$ ب$_{٢}$ = صفر + ١١٥٠ = ١١٥٠ وحدة

أ$_{٢}$ ب$_{١}$ = ٢٠٠٠ – ١١٥٠ = ٨٥٠ وحدة

أ$_{١}$ ب$_{١}$ = ٥٠٠ + ١١٥٠ = ١٦٥٠ وحدة

أ$_{١}$ ب$_{٢}$ = ١١٥٠ - ١١٥٠ = صفر

وتظل باقي خلايا الجدول كما هي دون تغيير.

وبذلك يكون جدول الحل الثاني كما يظهر بالجدول التالي (١٨/٨). مع إضافة عمود لحساب قيم الصفوف وصف لحساب قيم الأعمدة.

	قيم الأعمدة	ع$_{١}$ = ٣	ع$_{٢}$ = صفر	ع$_{٣}$ = -٤	
قيم الصفوف	المنافذ / المصانع	ب$_{١}$	ب$_{٢}$	ب$_{٣}$	الطاقات
ف$_{١}$ = ٦	أ$_{١}$	٣ ١٦٥٠	٧	٢ ١٢٥٠	٢٩٠٠
ف$_{٢}$ = ٥	أ$_{٢}$	٢ ٨٥٠	٥ ١١٥٠	٥	٢٠٠٠
ف$_{٣}$ = ٢	أ$_{٣}$	٧	٢ ١١٠٠	٤	١١٠٠
ف$_{٤}$ = ٣	أ$_{٤}$	٦	٣ ٧٥٠	٥	٧٥٠
	الاحتياجات	٢٥٠٠	٣٠٠٠	١٢٥٠	٦٧٥٠

يتضح من جدول النقل السابق (١٨/٨) أن عدد الخلايا المشغولة ٦ خلايا أي أنه حل مسموح به وتكلفة النقل طبقا لهذا الحل كما يلي:

١٦٥٠ × ٣ + ١٢٥٠ × ٢ + ٨٥٠ × ٢ + ١١٥٠ × ٥ + ١١٠٠ × ٢ + ٧٥٠ × ٣ = ١٩٣٥٠ جنيه.

اختبار مثالية الحل الثاني:

يتم اختبار المثالية بنفس الخطوات السابقة:

١ – حساب قيم الصفوف والأعمدة:

بفرض تعيين قيمة صفر للعمود الأول $ع_١$ وبتطبيق المعادلة السابقة رقم (١) يمكن حساب قيم الصفوف والأعمدة كما يلي:

$ت_{٢٢} = ف_٢ + ع_٢$

$٥ = ف_٢ + صفر$ ∴ $ف_٢ = ٥$

$ت_{٢٣} = ف_٣ + ع_٣$

$٢ = ف_٣ + صفر$ ∴ $ف_٣ = ٢$

$ت_{٢٤} = ف_٤ + ع_٢$

$٣ = ف_٤ + صفر$ ∴ $ف_٤ = ٣$

$ت_{١٢} = ف_٢ + ع_١$

$٢ = ٥ + ع_١$ ∴ $ع_١ = -٣$

$ت_{١١} = ف_١ + ع_١$

$٣ = ف_١ + (-٣)$ ∴ $ف_١ = ٦$

$ت_{٣١} = ف_١ + ع_٣$

$٣ = ٦ + ع_٣$ ∴ $ع_٣ = -٤$

وتظهر هذه القيم أمام الصفوف والأعمدة كما هو موضح بالجدول السابق (١٨/٨).

٢ – حساب تكلفة الفرصة المضاعة للخلايا الفارغة:

يتم استخدام المعادلة رقم (٢) السابق ذكرها وتكون تكلفة الفرصة للخلايا الفارغة كما يلي:

$ص_{٢١} = ف_{١} + ع_{٢} - ت_{٢١}$

= ٦ + صفر – ٧ = -١

$ص_{٣٢} = ف_{٢} + ع_{٣} - ت_{٣٢}$

= ٥ + (-٤) – ٥ = -٤

$ص_{١٣} = ف_{٣} + ع_{١} - ت_{١٣}$

= ٢ + (-٣) – ٧ = -٨

$ص_{٣٣} = ف_{٣} + ع_{٣} - ت_{٣٣}$

= ٣ +(-٤) – ٤ = -٦

$ص_{١٤} = ف_{٤} + ع_{١} - ت_{١٤}$

= ٣ + (-٣) – ٦ = -٦

$ص_{٣٤} = ف_{٤} + ع_{٣} - ت_{٣٤}$

= ٣ + (-٤) – ٥ = -٦

٣ – تقويم الحل:

يتضح مما سبق أن تكلفة الفرصة المضاعة لجميع الخلايا الفارغة سالبة أي لا توجد تكلفة مضاعة موجبة، وبذلك يكون الحل السابق (جدول ١٧/٨) هو الحل الأمثل.

وبذلك يكون برنامج النقل الأمثل على النحو التالي:

- يتم تخصيص ١٦٥٠ وحدة من طاقة $أ_{١}$ للمنفذ $ب_{١}$، ٢٥٠ وحدة للمنفذ $ب_{٣}$.
- يتم تخصيص ٨٥٠ وحدة من طاقة $أ_{٢}$ للمنفذ $ب_{١}$، ١١٥٠ وحدة للمنفذ $ب_{٢}$.
- يتم تخصيص كل طاقة $أ_{٣}$ (١١٠٠ وحدة) للمنفذ $ب_{٢}$.
- يتم تخصيص كل طاقة $أ_{٤}$ (٧٥٠ وحدة) للمنفذ $ب_{٢}$.

وتكون أقل تكلفة نقل ممكنة طبقا لهذا البرنامج ١٩٣٥٠ جنيه، بمقارنة بيانات جدول الحل الأمثل في حالة اختبار المثالية بطريقة حجر الوطء (جدول ١٥/٨) وبرنامج النقل وتكلفة النقل مع بيانات جدول الحل الأمثل في حالة اختبار المثالية بطريقة التوزيع المعدل (جدول ١٨/٨) يتضح أن كلي الطريقتين يوصل إلى نفس النتائج غير أن طريقة التوزيع المعدل تتطلب جهدا ووقتا أقل ما تتطلبه طريقة حجر الوطء.

٣/١/٨ طريقة النقل وتعظيم الأرباح:

في كثير من الحالات وبالنسبة لكثير من المنشآت قد يتم الإنتاج لسلعة متجانسة في مصانع مختلفة وبتكاليف إنتاج مختلفة نظراً ظروف الإنتاج ومدى توافر المواد الخام أو غير ذلك من الأسباب، وكذلك قد يتم تسويق نفس السلعة في منافذ توزيع مختلفة ولكن بأسعار بيع مختلفة بسبب ظروف موقع كل سوق ومدى المنافسة وأذواق المستهلكين ومستوى الدخل.

في مثل هذه الحالة لا تكون تكاليف النقل هي العامل المؤثر على الأرباح ولكن تتأثر الأرباح بتكاليف الإنتاج وأسعار البيع وتكاليف النقل، وهنا يكون الهدف المناسب للمنشأة هو تعظيم الأرباح وليس تخفيض تكلفة النقل فقط.

وهنا يثار سؤال عن مدى إمكانية تطبيق طريقة النقل (السابق شرحها عند معالجة مشكلة تخفيض التكاليف) في حالة مشاكل تعظيم الأرباح، والجواب على السؤال نعم يمكن تطبيق النقل على مشاكل تعظيم الأرباح وبنفس الأسلوب والخطوات مع مراعاة الفروق والاختلافات الآتية:

١ ـ حيث أن الهدف تعظيم الأرباح فإنه يتم استبدال تكلفة نقل الوحدة (التي تظهر في أعلى يمين الخلية) في جدول النقل بهامش ربح الوحدة المنقولة ويحسب هامش ربح الوحدة المنقولة وفقا للعلاقة الآتية:

هامش مساهمة الوحدة =

سعر بيع الوحدة - (تكلفة صنع الوحدة + تكلفة نقل الوحدة)

٢ ـ عند إعداد الحل المبدئي في مشاكل تعظيم الأرباح تطبق نفس الطرق التي سبق ذكرها في مشاكل تخفيض التكاليف على النحو التالي:

أ ـطريقة الركن الشمالي الشرقي تطبق بنفس الأسلوب والخطوات التي سبق توضيحها في مشاكل تخفيض التكاليف دون أية اختلافات.

ب ـ طريقة أدنى تكلفة تصبح طريقة أقصى ربح، حيث يتم البدء بشغل الخلية التي لها أكبر هامش ربح للوحدة أولا ثم الخلية التي تقل عنها مباشرة في الربح وهكذا.

ج ـ طريقة فوجل التقريبية تطبق بنفس الأسلوب والخطوات كما سبق تطبيقها في مشاكل تخفيض التكاليف، غير أنه يتم حساب الفرق بين أكبر هامش مساهمة للوحدة وهامش الربح الذي يقل عنه مباشرة (بدلا من حساب الفرق بين أقل تكلفتين في كل صف وكل عمود)، وعند التخصيص يتم للخلية التي لها أكبر هامش ربح بالعمود أو الصف صاحب أكبر فرق ربح.

٣ ـ اختبار مثالية الحل في مشاكل تعظيم الأرباح يتم بنفس الأسلوب وبنفس الطرق السابق توضيحها (حجر الوطء والتوزيع المعدل) غير أنه في مشاكل التعظيم يكون الحل أمثل إذا كانت تكلفة الفرصة المضاعة لجميع الخلايا الفارغة موجبة أو صفر (عكس مشاكل التخفيض) أما إذا وجدت تكلفة فرصة سالبة لخلية فارغة أو أكثر لا يكون الحل أمثل ولتحسينه ترشح الخلية الفارغة صاحبة أكبر تكلفة فرصة سالبة للدخول في الحل الجديد (عكس مشاكل التخفيض).

٨/١/٤ حالات خاصة بمشاكل النقل:

قد اظهر أثناء حل مشكلة النقل بعض الحالات الخاصة التي يمكن معالجتها بطريقة خاصة أيضا، ومن هذه الحالات الخاصة ما يلي:

١ ـ حالة عدم التوازن:

تظهر هذه الحالة عندما لا يتساوى مجموع طاقات المصادر (العرض) مع مجموع احتياجات المنافذ أو النهايات (الطلب) وتعالج هذه الحالة كما يلي:

أ –إذا كان مجموع طاقات المصادر (العرض) أكبر من مجموع احتياجات المنافذ (الطلب) يتم إضافة منفذ وهمي (صوري) تنقل إليه الكمية الزائدة وتكون تكلفة النقل إلى المنفذ الوهمي صفر. ويعنى هذا المنفذ الوهمي أن هناك كمية (مقدار الفرق بين العرض والطلب) لن يتم نقليا من المصانع إلى المنافذ بل ستخزن بالمصانع.

ب – إذا كان مجموع طاقات المصادر (العرض) أقل من مجموع احتياجات المنافذ (الطلب) يتم إضافة مصدر وهمي تنقل منه الكمية التي تكمل احتياجات المنافذ وتكون تكلفة النقل من المصدر الوهمي إلى المنافذ صفر، ويعنى هذا المصدر الوهمي أن هناك كمية (مقدار الفرق بين العرض والطلب) لن تنقل من المصانع إلى المنافذ بل سيتم تدبيرها من خارج مصانع الشركة أي من منافذ التوزيع نفسها.

٢ – حالة تعدد الحلول المثلي:

تظهر هذه الحالة إذا كانت خلية (أو أكثر) غير مشغولة وغير أساسية (يعنى لم تدخل في الحل) في جدول الحل الأمثل ولها تكلفة فرصة مضاعة صفر. فإدخال هذه الخلية في الحل قد يغير من برنامج النقل ولكن لن يؤثر على التكلفة الكلية للنقل.

وهذه الحالة تعطي الإدارة فرصة اختيار برنامج النقل الذي يناسب ظروفها وإمكانيتها ويراعي العوامل الأخرى التي لا تقاس ماليا مثل النواحي النفسية ومراعاة رغبات منافذ التوزيع إلى غير ذلك من الاعتبارات دون تحمل لتكاليف نقل أكثر.

٣ – حالة الحل غير المنتظم:

تظهر مشكلة الحل غير المنتظم (الاعتلال) Degenerate solution عندما يكون عدد الخلايا المشغولة، أقل من العدد المسموح به، أي أن قاعدة الحل الممكن غير متوافرة، ويترتب على هذه المشكلة عدم إمكانية تحديد المسار المغلق لبعض الخلايا الفارغة.

هذا وقد تظهر هذه المشكلة عند إعداد الحل المبدئي للمشكلة وفي هذه الحالة يتم تعيين كمية صفرية لأي خلية فارغة يتم اختيارها عشوائيا، ولكن للتوصل إلى الحل الأمثل بصورة أسرع يمكن تعيين قيمة صفرية لخلية فارغة تكون لها أقل تكلفة نقل في الجدول (وفي حالة التعظيم يكون لها أكبر هامش مساهمة بين الخلايا الفارغة).

أما إذا ظهرت مشكلة الحل غير المنتظم في مرحلة الحلول الوسيطة أو عند الحل الأمثل فإنه يمكن علاجها بإنشاء خلية (أو عدد من الخلايا) المشغولة بكمية صفرية، وتعامل هذه الخلية (أو الخلايا) نفس معاملة الخلايا المشغولة أصلا (التي في الحل الأساسي) ويتم اختيار الخلية (أو الخلايا) الصفرية عشوائيا. أو تخصص القيمة الصفرية لإحدى الخليتين اللتين أصبحتا فارغتين نتيجة عملية تحسين الحل، وذلك عندما تتساوى الكميات التي في الخلايا المرشحة للخروج من الحل (أي الخلاياذات الإشارة السالبة في المسار المغلق).

هذا وعند تحسين الحل غير المنتظم توجد ثلاثة احتمالات هي:

أ – الخلية الصفرية تظل كما هي ولا تتأثر بعملية تحسين الحل وذلك إذا لم تقع ضمن خلايا المسار المغلق للخلية المرشحة للدخول في الحل الجديد، ويظهر ذلك من الشكل التالي بفرض أن الخلية المرشحة للدخول في الحل هي أ١ ب١.

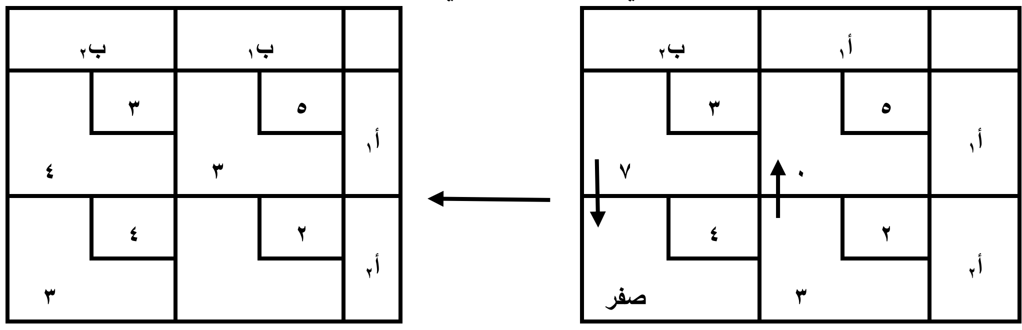
	أ١	ب٢
أ١	٥ / ٠	٦ / ٥-
أ٢	٤	٢ / صفر
أ٣	٣ / ٦	٩ / ٢

←

	ب١	ب٢
أ١	٥ / ٥	٦
أ٢	٤	٢ / صفر
أ٣	٣ / ١	٩ / ٧

يلاحظ من الشكل السابق أن الخلية أ٢ ب٢ لم تتأثر بعملية تحسين الحل ودخول الخلية أ١ ب١ في الحل الجديد لأنها لم تكن ضمن خلايا المسار المغلق للخلية المرشحة في الدخول في الحل الجديد.

ب –الخلية الصفرية تملاء بكمية فعلية وتصبح متغير فعال في المشكلة، وذلك إذا كانت ضمن الخلايا التي أشارتها موجبة (أي يضاف لها) في المسار المغلق للخلية المرشحة للدخول في الحل الجديد. ويظهر ذلك من الشكل التالي بفرض أن الخلية المرشحة للدخول في الحل الجديد هي أ١ ب١.



يوضح الشكل السابق كيف أصبحت الخلية الصفرية أ٢ ب٢ بعد تحسين الحل خلية مشغولة بكمية فعلية.

ج – تنتقل الخلية الصفرية من مكانها دون أن يتأثر الحل وتظل تكلفته كما هي، وذلك إذا كانت الخلية الصفرية ضمن الخلايا التي أشارتها سالبة (ينقل منها) في المسار المغلق للخلية المرشحة للدخول في الحل- الجديد ويظهر في ذلك من الشكل التالي بفرض أن الخلية المرشحة للدخول في الحل هي أ٢ ب١.

	أ١	ب٢
أ١	٥ / ٠	٣ / ٣
أ٢	٢ / ٠	٤ / ٥

	ب١	ب٢
أ١	٥	٣ / ٣
أ٢	٢ / ٠	٤ / ٥

ويظهر الشكل السابق كيف انتقلت الخلية الصفرية من مكانها فبدل أن كانت أ١ ب١ الخلية الصفرية أصبحت أ٢ ب١ هي الخلية الصفرية دون أن تتأثر تكلفة الحل ولا الحل نفسه.

٤ – حالة الخلايا غير الممكنة (غير الممكن شغلها):

قد يصعب في بعض الحالات العملية تلبية احتياجات كل منافذ التوزيع من كل مصدر من المصادر، فقد تمنع الظروف العملية نقل كميات من المصدر الأول مثلا للمنفذ الثالث مثلا (بل النقل للمنفذين الأول والثاني فقط). في مثل هذه الحالة تكون الخلية أ٢ ب٣ غير ممكن شغلها.

ولعلاج هذه المشكلة يتم تعيين تكلفة كبيرة جدا لهذه الخلية غير الممكنة حتى تخرج من الحل ولا تدرج فيه (كما هو الحال عند استخدام طريقة السمبلكس حيث يتم تعيين تكلفة كبيرة رمزها م مثلا للمتغيرات الصورية حتى تخرج من الحل). ويتم ذلك الإجراء إذا كان يتم حل مشكلة النقل باستخدام الحاسبات الإلكترونية ، أما إذا كان حل مشكلة النقل يتم يدويا، فيمكن تجاهل هذه الخلية الممكنة تماما وتكملة الحل وكأنها غير موجودة.

ويوضح الشكل التالي شكل جدول النقل في حالة وجود خلية غير ممكنة، وذلك بفرض أن الخلية غير الممكنة هي أ٢ ب٣ وبفرض إعداد الحل بطريقة الركن الشمالي الشرقي.

	ب١	ب٢	ب٣	الطاقات
أ١	٥ / ٥٠	٧ / ٥٠	٨	١٠٠
أ٢	٤	٧ / ٣٠	(خلية غير ممكنة – مظللة)	٣٠
أ٣	٣	٩ / ١٠	١٥ / ٤٠	٥٠
الاحتياجات	٥٠	٩٠	٤٠	١٨٠

٢/٨ طريقة التعيين: The Assignment Method:

تعتبر مشكلة التعيين (كما سبق القول) حالة خاصة من مشاكل البرمجة الخطية، حيث يكون الهدف فيها مقابلة (تعيين) عدد معين من المصادر (الموارد أو الإمكانيات) بنفس العدد من الغايات (الاستخدامات أو الأعمال) بصورة تمكن من تحقيق أدنى تكلفة ممكنة أو أقل وقت ممكن (أو تحقيق أقصى ربح ممكن في حالة تعظيم الأرباح).

هذا ويتم التعيين على أساس الربط بين واحد من المصادر (الموارد) وواحد فقط من الاستخدامات (الغايات) أو العكس أي ربط غاية واحدة بمصدر (مورد) واحد فقط حيث يجب تساوى عدد المصادر مع عدد الغايات.

ونظرا لهذه الطبيعة الخاصة بمشاكل التعيين وطريقة التعيين فإن النموذج الرياضي لها يتصف ببعض الصفات منها ما يلي:

أ –تكون المقابلة بين واحد من المصادر وواحد فقط من الاستخدامات، أي عدد الموارد المطلوبة للاستخدامات في أي صف تساوى واحد صحيح (على فرض أن الصفوف تمثل الموارد) وكذلك فإن عدد الاستخدامات المعينة للمورد في أي عمود تساوى واحد صحيح (على فرض أن الأعمدة تمثل الاستخدامات).

ب – ضرورة تحقيق المساواة بين عدد المصادر وعدد الغايات أي تكون مصفوفة معاملات الخلايا مربعة[١].

ج – الكمية التي تخصص لكل خلية أما أن تكون واحد صحيح (أي تكون الخلية مشغولة) أو صفر (أي تكون فارغة) ولا يخصص للخلية أكثر من واحد صحيح.

هذا ويبدو من المناسب الإشارة إلى أن مشكلة التعيين يمكن أن تحل بطرق متعددة، مثل استخدام الطريقة العامة للبرمجة الخطية أو بطريقة للنقل

---

(١) في حالة عدم التساوى يتم الاستعانة بمتغيرات صورية كما سيتم إنشاء الله توضيح ذلك في نهاية هذه النقطة ٢/٢.

باعتبار أن مشكلة التعيين تعد حالة خاصة لمشاكل النقل، كذلك يمكن حلها إذا كانت صغيرة، (عدد المتغيرات صغير) عن طريق أسلوب الحصر المباشر أو السرد Enumeration وذلك بإيجاد كل التباديل الممكنة لربط الموارد بالاستخدامات ولما كانت لها هيكل خاص يميزها عن المشاكل الأخرى للبرمجة الخطية التي يمكن حلها بطريقة السمبلكس أو طريقة النقل، فقد بذلت جهود وأجريت دراسات توصلت في النهاية إلى طريقة تناسب حل مشاكل التعيين بصورة أفضل وأكفا ويتم إنشاء الله تناول هذه الطريقة والتي تسمى بالطريقة المجرية The Hungarian Method على النحو التالي:

خطوات طريقة التعيين:

حيث أن مشاكل التعيين وكما سبق القول تعتبر نوع خاص من مشاكل البرمجة الخطية، فإن خطوات حلها وتتابع هذه الخطوات لا تختلف كثيرا عن خطوات حل مشاكل البرمجة الخطية الأخرى، وتتمثل خطوات حل مشاكل التعيين طبقا لطريقة التعيين فيما يلي:

١ – إعداد مصفوفة تكلفة الفرصة المضاعة (تمثل الحل المبدئي).

٢- اختبار مثالية الحل.

٣ – تحسين الحل إذا لم يكن أمثل والاستمرار في تعديل مصفوفة تكاليف الفرصة المضاعة (تحسين الحل) وإعادة اختبار المثالية حتى يتم التوصل إلى الحل الأمثل.

٤ – وضع برنامج التعيين الأمثل وحساب التكاليف أو الأرباح الكلية.

هذا ويمكن توضيح خطوات التعيين من خلال المثال التالي:

لدى إحدى الشركات الصناعية في أحد الأقسام الإنتاجية أربع آلات يمكن لكل آلة أن تنفذ أي أمر من أوامر التشغيل الموكل تنفيذها لإدارة هذا القسم الإنتاجي ولكن بتكاليف مختلفة، ويوضح الجدول التالي التكاليف المتوقعة لإتمام كل أمر تشغيل من هذه الأوامر على كل آلة (بالجنيه).

الأمر الإنتاجي / الألة	أ	ب	ج	د
س	٦٢	٤٤	٨٠	٥٢
ص	٤٠	٥٢	٥٤	٦٠
ع	٤٦	٤٠	٥٨	٣٦
ل	٦٦	٦٤	٧٦	٥٠

هذا وترغب إدارة الشركة في جدولة الأوامر الإنتاجية على الآلات بصورة تحمل الشركة أقل تكلفة تعيين ممكنة.

تقوم طريقة التعيين (الطريقة المجرية) على ما يسمى بعمليات تقليص المصفوفة Matrix Reduction وذلك عن طريق طرح وإضافة قيم معينة في المصفوفة وتتلخص خطوات هذه الطريقة في أربع مراحل أساسية (كما سبق ذكرها) يمكن توضيحها على النحو التالي بالتطبيق على بيانات المثال السابق.

أولا: إعداد مصفوفة تكاليف الفرصة المضاعة:

توضع هذه المصفوفة تكاليف الفرصة المضاعة التي ستتحملها الشركة نتيجة عدم إتباع الطريقة الأمثل في تعيين الآلات لتنفيذ أوامر التشغيل. ويتم إعداد هذه المصفوفة على خطوتين كما يلي:

١ ــ تطرح أصغر مفردة (تكلفة) في كل صف من باقي قيم نفس الصف (يمكن البدء بالأعمدة) فتكون المصفوفة كما يلي:

	أ	ب	ج	د
س	١٨	صفر	٣٦	٨
ص	صفر	١٢	١٤	٢٠
ع	١٠	٤	٢٢	صفر
ل	١٦	١٤	٢٦	صفر

توضح المصفوفة السابقة تكلفة الفرصة المضاعة لكل آلة، فتعيين الآلة س لتنفيذ الأمر (أ) (يتضمن تكلفة إضافية) بالمقارنة بأفضل فرصة تعيين في هذا الصف) تعادل ٦٢- ٤٤ = ١٨، في حين أن تعيين الآلة س لتنفيذ الأمر الإنتاجي ج يتضمن تكلفة إضافية تعادل ٨٠- ٤٤ = ٣٦، وتعيين الآلة س لتنفيذ الأمر الإنتاجي د يتضمن تكلفة إضافية تعادل ٥٢ ـ ٤٤ = ٨ وهذا ما يظهر من الصف الأول في المصفوفة وهكذا.

٢ ـ تطرح أصغر مفردة في كل عمود (في المصفوفة السابقة في خطوة ١) من باقي عناصر نفس العمود. وبالنظر إلى المصفوفة السابقة يتضح أن أصغر مفردة في العمود الثالث تطرح من باقي القيم في نفس العمود أما باقي الأعمدة فأقل قيمة فيها صفر فتظل قيم هذه الأعمدة كما هي، وبذلك تكون مصفوفة تكاليف الفرصة المضاعة كما يلي:

	أ	ب	ج	د
س	١٨	صفر	٢٢	٨
ص	صفر	١٢	صفر	٢٠
ع	١٠	٤	٨	صفر
ل	١٦	١٤	١٢	صفر

توضح المصفوفة السابقة تكلفة الفرصة المضاعة الكلية أي بالأخذ في الاعتبار كل من تكلفة المضاعة للآلة وتكلفة الفرصة المضاعة للأمر الإنتاجي.

ثانيا: اختبار المثالية:

يتم التوصل إلى الحل الأمثل إذا تم تقليص مصفوفة البدائل حتى تكون قيمة أحد الحلول الممكنة مساوية للصفر، أى نستمر في تقليص المصفوفة حتى يتوافر عدد من الخلايا الصفرية المستقلة مساوى لعدد الصفوف أو عدد الأعمدة (ومن الضروري تساوى عدد الصفوف مع عدد الأعمدة) وفي هذه الحالة تكون تكلفة الفرصة المضاعة للتعيين صفر.

وللتحقق من ذلك يتم رسم عدد من الخطوط تغطى الخلايا (المفردات) الصفرية في مصفوفة تكاليف الفرصة المضاعة، فإذا كان أقل عدد ممكن من الخطوط يساوى (أو يزيد عن) عدد الصفوف أو عدد الأعمدة يكون الحل الأمثل (أي تكون هناك خلايا صفرية مستقلة تساوى عدد الصفوف أو الأعمدة)، يعنى يكون هناك حل تكلفة الفرصة المضاعة له صفر.

وتوضح المصفوفة التالية مصفوفة تكاليف الفرصة المضاعة بعد رسم الخطوط التي تمر بالخلايا الصفرية.

	أ	ب	ج	د
س	١٨	صفر	٢٢	٨
ص	صفر	١٢	صفر	٢٠
ع	١٠	٤	٨	صفر
ل	١٦	١٤	١٢	صفر

يتضح من المصفوفة السابقة أن أقل عدد ممكن من الخطوط التي تغطي الخلايا الصفرية هو ثلاثة خطوط وهذا العدد من الخطوط يقل عن عدد الصفوف أو عدد الصفوف أو عدد الأعمدة، وبذلك لا يكون هذا حل أمثل ويلزم تحسينه.

ثالثا: تحسين الحل واختبار مثاليته:

لتحسين الحل يلزم زيادة عدد الخلايا الصفرية بحيث يتوافر عدد من الخلايا الصفرية المستقلة يساوى (أو يزيد عن) عدد الصفوف أو عدد الأعمدة حتى يمكن تعيين كل آلة لأمر إنتاجي معين بدون تحمل تكلفة فرصة مضاعة، ولتحقيق ذلك تتبع الخطوات التالية:

١ - تطرح أصغر قيمة في الخلايا التي لم يمر عليها خط أو خطان (غير المغطاة) من جميع القيم في الخلايا التي لم يمر عليها خط أو خطان (غير المغطاة).

٢ ــ تضاف نفس القيمة التي تم طرحها من الخلايا غير المغطاة على جميع الخلايا التي تقع عند تقاطع الخطوط (أي مر عليها خطان).

٣ ــ تظل قيم الخلايا التي مر عليها خط واحد كما هي دون تغيير.

٤ ــ تكرار الخطوات السابقة (١ حتى ٣) حتى يتم التوصل إلى الحل الأمثل.

بتطبيق هذه الخطوات على مصفوفة تكاليف الفرصة المضاعة السابقة في الخطوة ثانيا يلاحظ وجود ٦ خلايا غير مغطاة هي ع أ، ع ب، ع ج، ل أ، ل ب، ل ج، وأقل قيمة في هذه الخلايا هي ٤ في الخلية ع ب وقد وضعت في مستطيل، وبطرح الرقم ٤ من القيم في الست خلايا غير المغطاة السابق ذكرها وإضافة نفس الرقم٤ إلى الخلايا س د، ص د لأنهما خلايا التقاطع وتكرار كتابة قيم باقي الخلايا التي مر عليها خط واحد كما هي يتم التوصل إلى المصفوفة التالية:

	أ	ب	ج	د
س	١٨	صفر	٢٢	١٢
ص	صفر	١٢	صفر	١٤
ع	٦	صفر	٤	صفر
ل	١٢	١٠	٨	صفر

وبرسم خطوط على الخلايا الصفرية يتضح أن أقل عدد ممكن من الخطوط هو ثلاثة خطوط فقط أي أقل من عدد الصفوف أو عدد الأعمدة إذن ليس هذا حل أمثل ويلزم تحسينه وذلك بتكرار الخطوات الأربع السابق ذكرها في ثالثا.

بفحص المصفوفة السابقة يلاحظ أن أقل قيمة لم يمر عليها خط هي ٤ (في الخلية ع ج) ووضع حولها مربع، وبطرحها من جميع القيم التي لم يمر عليها خط وجمعها على القيم التي تقع عند تقاطع الخطوط تكون مصفوفة تكاليف الفرصة المضاعة كما يلي:

	أ	ب	ج	د
س	١٤	صفر	١٨	١٢
ص	صفر	١٦	صفر	٢٨
ع	٢	صفر	صفر	صفر
ل	٨	١٠	٨	صفر

برسم خطوط على الخلايا الصفرية في المصفوفة السابقة، يتضح أن أقل عدد ممكن من الخطوط التي أمكن رسمها هو ٤ خطوط تساوى عدد الصفوف أو عدد الأعمدة، يعنى هذا حل أمثل، أي يمكن تعيين الآلات لأوامر التشغيل دون تحمل تكلفة فرصة مضاعة، أي تكون تكاليف الفرصة المضاعة صفر.

رابعا: برنامج التعيين الأمثل:

لتحديد برنامج التعيين الأمثل يتم البحث عن الخلية الصفرية التي تكون وحيدة في صفها أو عمودها ثم تتم المقابلة (التعيين) بين الآلة والأمر الإنتاجي اللذين يتقابلان عند هذه الخلية الصفرية، ثم يتم حذف الصف والعمود اللذان يتقاطعان عند هذه الخلية الصفرية، يتم البحث عن خلية صفرية أخرى تكون هى الوحيدة في صفها أو عمودها وتجرى المقابلة (التعيين) بين الآلة والأمر الإنتاجي اللذين يتقابلان عند هذه الخلية وهكذا حتى يتم التعيين الكامل لجميع الآلات والأوامر.

وبالتطبيق على المصفوفة السابقة يكون التعيين على النحو التالي:

- الصف الأول به صفر واحد لذلك يتم تعيين الآلة س للأمر الإنتاجي ب ويتم استبعاد الصف الأول والعمود الثاني عند تكملة التعيين.
- العمود الأول به صفر واحد لذلك يتم تعيين الآلة ص للأمر الإنتاجي أ.
- بحذف الصف الثاني يكون العمود الثالث به صفر واحد لذلك يتم تعيين الآلة ع للأمر الإنتاجي ج.
- الصف الرابع به صفر واحد لذلك يتم تعيين الآلة ل للأمر الإنتاجي د.

ولحساب تكلفة برنامج التعيين يتم الرجوع للمصفوفة الأصلية وحساب التكاليف الكلية وفقا للتعيين الذي تم إجرائه وبذلك يكون برنامج التعيين الأمثل والتكاليف كما يلي:

- تعيين الآلة س للأمر الإنتاجي ب بتكلفة ٤٤ جنيه.
- تعيين الآلة ص للأمر الإنتاجي أ بتكلفة ٤٠ جنيه.
- تعيين الآلة ع للأمر الإنتاجي ج بتكلفة ٥٨ جنيه.
- تعيين الآلة ل للأمر الإنتاجي د بتكلفة ٥٠ جنيه.
- التكلفة الكلية لبرنامج التعيين الأمثل = ٤٤ + ٤٠ + ٥٨ + ٥٠ = ١٩٢ جنيه.

طريقة التعيين وتعظيم الأرباح:

ليس من الضروري أن يكون هدف متخذ قرار التعيين هو تخفيض التكاليف، بل قد يكون أيضا تعظيم الأرباح، وذلك في الحالات التي يؤثر فيها قرار التعيين واختيار برنامج معين للتعيين على أرباح المنشأة، كأن يتعلق برنامج التعيين مثلا برجال البيع يحققون نتائج أعمال مختلفة باختلاف مناطق البيع التي يخصصون لها.

هذا وعند تطبيق طريقة التعيين في حالة تعظيم الأرباح يتم إتباع نفس الخطوات السابق ذكرها في حالة تخفيض التكاليف غير أنه عند إعداد مصفوفة الأرباح المضاعة يتم طرح جميع مفردات الصف (يمكن البدء بالأعمدة) من أكبر مفردة في هذا الصف على أساس أن أكبر مفردة هي التي تعظم الأرباح والفرق بينها وبين المفردات الأخرى (الأقل منها طبعا) يمثل أرباح مضاعة، أي أن الأرقام بعد إجراء عملية الطرح تعنى أن عدم إجراء التعيين الأمثل يحمل المنشأة تكاليف فرصة مضاعة تتمثل في الأرباح المضاعة نتيجة عدم التعيين الأمثل.

ويمكن توضيح ذلك بالمثال التالي:

تقوم أحدي المنشآت الصناعية بتسويق منتجاتها في أربع مناطق هي ب$_{١}$، ب$_{٢}$، ب$_{٣}$، ب$_{٤}$ ولديها أربع رجال بيع هم أ$_{١}$، أ$_{٢}$، أ$_{٣}$، أ$_{٤}$، وعلى ضوء تجارب الماضي ودراسة أداء رجال البيع في الفترات السابقة أمكن توفير البيانات والمعلومات التالية عن الأرباح (أو الخسائر) التي يتوقع أن يحققها كل رجل بيع في منطقة من مناطق البيع. (الأرقام بالألف جنيه).

مناطق البيع / رجال البيع	ب$_{١}$	ب$_{٢}$	ب$_{٣}$	ب$_{٤}$
أ$_{١}$	٦	٨	٩	٥
أ$_{٢}$	٨	٥	٥	٧
أ$_{٣}$	٩	٧	٨	٨
أ$_{٤}$	٧	٩	٧	١٠

هذا وترغب إدارة المنشأة في معرفة برنامج التعيين الأمثل الذي يحقق للمنشأة أقصى أرباح ممكنة.

أولا: إعداد مصفوفة الأرباح المضاعة:

أ –تطرح عناصر كل صف (يمكن البدء بالأعمدة) من أكبر مفردة في هذا الصف، وبذلك تكون مصفوفة الأرباح المضاعة كما يلي:

	ب$_{١}$	ب$_{٢}$	ب$_{٣}$	ب$_{٤}$
أ$_{١}$	٣	١	صفر	٤
أ$_{٢}$	صفر	٣	١٣	١
أ$_{٣}$	صفر	٢	١	١
أ$_{٤}$	٣	١	٣	صفر

توضح المصفوفة السابقة الأرباح المضاعة لكل رجل بيع، حيث تعيين أ$_{١}$ مثلا في منطقة البيع ب$_{١}$ يعنى ضياع أرباح قدرها ٣٠٠٠ جنيه وهي الفرق بين أرباح أ$_{١}$ في المنطقة ب$_{١}$ وبين أرباح أ$_{١}$ في المنطقة ب$_{٣}$ (٩ – ٦ = ٣). كذلك تعيين أ$_{٢}$ في المنطقة ب$_{٣}$ يعنى ضاع أرباح قدرها ١٣٠٠٠ جنيه لأن

تعيين $أ_1$ في $ب_1$ يحقق أرباح قدرها ٨٠٠٠ جنيه في حين أن تعيينه في $ب_3$ يحقق خسارة قدرها ٥٠٠٠، إذن مقدار الأرباح المضاعة في حالة تعيينه في $ب_3$ = ٨٠٠٠ – (-٥٠٠٠) = ١٣٠٠٠ جنيه وهكذا.

ب –تطرح أصغر مفردة في كل عمود (في المصفوفة السابقة في خطوة ١) من جميع عناصر هذا العمود، وبذلك تكون مصفوفة الأرباح المضاعة كما يلي:

	$ب_1$	$ب_2$	$ب_3$	$ب_4$
$أ_1$	٣	صفر	صفر	٤
$أ_2$	صفر	٢	١٣	١
$أ_3$	صفر	١	١	١
$أ_4$	٣	صفر	٣	صفر

توضح المصفوفة السابقة للأرباح المضاعة الكلية، أي المرتبطة برجال البيع وبمناطق التوزيع.

ثانيا: اختبار المثالية:

يتم رسم خطوط تغطي جميع الخلايا الصفرية، وبرسم أقل عدد ممكن من الخطوط ليغطي الخلايا الصفرية في المصفوفة السابقة، تكون المصفوفة والخطوط المرسومة على الأصفار كما يلي:

	$ب_1$	$ب_2$	$ب_3$	$ب_4$
$أ_1$	٣	صفر	صفر	٤
$أ_2$	صفر	٢	١٣	١
$أ_3$	صفر	١	١	١
$أ_4$	٣	صفر	٣	صفر

حيث أن أقل عدد ممكن من الخطوط هو ثلاثة خطوط أي أقل من عدد الأعمدة أو الصفوف، إذن ليس هذا الحل أمثل ويلزم تحسينه.

ثالثا: تحسين الحل واختبار مثاليته:

بطرح أصغر مفردة في الخلايا التي لم يمر عليها خط (وهي ١) من جميع الخلايا غير المغطاة وجمع نفس هذه المفردة على الخلايا التي تقع عند تقاطع الخطوط ونقل باقي الخلايا كما هي تكون المصفوفة كما يلي:

	ب$_1$	ب$_2$	ب$_3$	ب$_4$
أ$_1$	٤	صفر	صفر	٤
أ$_2$	صفر	١	١٢	صفر
أ$_3$	صفر	صفر	صفر	صفر
أ$_4$	٤	صفر	٣	صفر

حيث أن أقل عدد ممكن رسمه لتغطيه جميع الخلايا الصفرية في المصفوفة السابقة هو ٤ خطوط أي يساوى عدد الصفوف أو عدد الأعمدة إذن يعتبر الحل السابق هو الحل الأمثل. وبذلك يمكن وضع برنامج التعيين الأمثل وحساب الأرباح الكلية.

رابعا: برنامج التعيين الأمثل وحساب الأرباح:

بفحص المصفوفة السابق يلاحظ وجود أكثر من خلية صفرية في كل صف وفي كل عمود ومعنى ذلك وجود أكثر من حل أمثل، يعنى يمكن وضع أكثر من برنامج تعيين أمثل على النحو التالي:

البرنامج الأول:

أ$_1$ يعين في ب$_4$ بربح قدره ٨٠٠٠ جنيه.

أ$_2$ يعين في ب$_1$ بربح قدره ٨٠٠٠ جنيه.

أ$_3$ يعين في ب$_3$ بربح قدره ٨٠٠٠ جنيه.

أ$_4$ يعين في ب$_2$ بربح قدره ١٠٠٠٠ جنيه.

الأرباح الإجمالية ٣٤٠٠٠ جنيه

البرنامج الثاني:

أ$_1$ يعين في ب$_3$ بربح قدره ٩٠٠٠ جنيه.

أ$_2$ يعين في ب$_4$ بربح قدره ٧٠٠٠ جنيه.

أ٣ يعين في ب١ بربح قدره ٩٠٠٠ جنيه.

أ٤ يعين في ب٢ بربح قدره ٩٠٠٠ جنيه.

الأرباح الإجمالية ٣٤٠٠٠ جنيه

البرنامج الثالث:

أ١ يعين في ب٣ بربح قدره ٩٠٠٠ جنيه.

أ٢ يعين في ب١ بربح قدره ٨٠٠٠ جنيه.

أ٣ يعين في ب٢ بربح قدره ٧٠٠٠ جنيه.

أ٤ يعين في ب٤ بربح قدره ١٠٠٠٠ جنيه.

الأرباح الإجمالية ٣٤٠٠٠ جنيه

حالات خاصة في مشاكل التعيين:

عند معالجة مشاكل التعيين قد تظهر بعض المشاكل الخاصة التي تتطلب معالجة خاصة ومن هذه الحالات الخاصة ما يلي:

١ – عدم تساوى عدد العناصر المطلوب تخصيصها مع عدد المهام أو الوظائف المطلوب التخصيص لها أو عليها:

يمكن علاج هذه الحالة بإضافة عمود (أو عدة أعمدة) وهمي إذا كان عدد الموارد (الآلات مثلا) أكبر من عدد الاستخدامات (الأوامر الإنتاجية مثلا) وحيث أن تكلفة أداء الوظيفة الوهمية ستكون متساوية لجميع الموارد (الآلات) لذلك يفترض أنها صفر. أي أن عناصر العمود الوهمي تكون جميعها أصفار. ومعنى ذلك أن الآلة التي تخصص لتنفيذ الأمر الإنتاجي الوهمي تظل متوقفة لا تعمل.

هذا وفي حالة ما إذا كان عدد الأوامر الإنتاجية (الأعمدة) أكثر من عدد الآلات (الصفوف) تضاف آلة وهمية (صف وهمي) ومعنى ذلك بقاء أمر تشغيل دون إتمام لعدم وجود آلة حقيقية تنفذ هذا الأمر الإنتاجي.

هذا ويبدو من المناسب الإشارة إلى أنه يمكن إضافة أي عدد من الأعمدة أو أي عدد من الصفوف لتحقيق المساواة بين عدد المصادر وعدد الاستخدامات ولكن لا يصح إضافة عمود أو أعمدة مع إضافة صف أو صفوف في نفس الحالة. بل أما تضاف أعمدة فقط أو تضاف صفوف فقط.

٢ – حالة تعدد الحلول:

كما هو الحال في طريقة السمبلكس وفي طريقة النقل فإنه في طريقة التعيين أيضا يمكن أن تظهر مشكلة تعدد الحلول المثلي.

هذا وإذا ظهرت في طريقة التعيين حالة تعدد الحلول قبل التوصل إلى الحل الأمثل يتم إهمال هذه الحلول البديلة والاستمرار في تحسين الحل يتم التوصل إلى الحل الأمثل. أما إذا ظهرت حالة تعدد الحلول المثلى أي بعد التوصل إلى الحل الأمثل، فإنه يلزم تحديد هذه الحلول المثلى وكما سبق توضيح ذلك في المثال الخاص بتعظيم الأرباح حتى تكون أمام الإدارة لتختار من بينها ما يناسب ظروفها، فمع أن جميع الحلول المثلي البديلة تعطي نفس النتيجة (نفس التكلفة أو نفس الأرباح) إلا أنه قد تكون هناك اعتبارات أخرى (كالتفضيل الشخصي لمتخذ القرار، عوامل نفسية ... الخ) تؤخذ في الحسبان عند المفاضلة بين الحلول البديلة.

٣ – وجود بدائل تعيين غير مرغوب في استخدامها في الحل الأمثل:

يمكن توضيح هذه الحالة بالمثال التالي:

استأجرت أحدى الشركات التجارية معرضا جديدا، وتم توزيع المساحة المتاحة بالمعرض على الأقسام البيعية المختلفة، غير أنه مازالت هناك أربعة أماكن (س، ص، ع، ل) لم يتم تعيينها بعد لأقسام بيعية معينة، وفي نفس الوقت مازالت هناك أربعة أقسام للبيع لم يتم تخصيص أماكن لها وهي الأقسام أ، ب، جـ، د.

هذا وترغب إدارة الشركة في تحديد برنامج التعيين الأمثل لهذه الأقسام بما يحقق أقصى أرباح ممكنة مع مراعاة أنه على ضوء الخبرة السابقة لإدارة المبيعات فإنه من غير المرغوب فيه تخصيص الموقع ص للقسم ج لأن ذلك سيؤثر على الحركة داخل المعرض ككل مما يعوق العمل. وقد أمكن توفير التقديرات التالية لأرباح كل قسم في كل موقع (الأرقام بالألف جنيه).

المواقع / الأقسام	س	ص	ع	ل
أ	٤٠	٦٠	٣٠	٥٠
ب	٧٠	٣٠	٥٠	٤٠
ج	٩٠	٧٠	٦٠	١٠٠
د	١٠٠	٩٠	٧٠	٦٠

يمكن علاج مشكلة عدم الرغبة في تخصيص الموقع ص للقسم ج بطريقتين على النحو التالي:

١ – الطريقة الأولى:

يتم وضع قيمة متناهية في الكبر بالسالب ولتكن (-م) وذلك في حالة تعظيم الأرباح (وبالموجب (+م) في حالة تخفيض التكاليف) لأن هذه القيمة الكبيرة لن تصبح صفرا وبالتالي يستبعد هذا البديل عند الاختيار أي توضع بيانات الحالة السابقة على النحو التالي ثم تتبع الخطوات السابقة ذكرها للتوصل إلى الحل الأمثل.

	س	ص	ع	ل
أ	٤٠	٦٠	٣٠	٥٠
ب	٧٠	٣٠	٥٠	٤٠
ج	٩٠	-م	٦٠	١٠٠
د	١٠٠	٩٠	٧٠	٦٠

٢ – الطريقة الثانية:

يتم تظليل هذا البديل وإهماله تماما في أثناء إجراء خطوات التوصل إلى برنامج التعيين الأمثل. أي توضع بيانات الحالة السابقة على النحو التالي:

المواقع / الأقسام	س	ص	ع	ل
أ	٤٠	٦٠	٣٠	٥٠
ب	٧٠	٣٠	٥٠	٤٠
ج	٩٠		٦٠	١٠٠
د	١٠٠	٩٠	٧٠	٦٠

الفصل التاسع
أسلوب تقييم ومراجعة البرامج
(بيرت)

Program Evaluation and Review Technique (P E R T)

٩/ ١- مقدمة:

تتصف المشروعات الكبيرة بضخامتها وإحتياجها لموارد طائلة ووقت طويل لإتمامها. كما أنها تتكون من أنشطة كثيرة ومتشابكة، فإذا حدث تأخير فى وقت أحد الأنشطة ربما أدى ذلك الى تأخير إتمام المشروع، وذلك لأن المشروع يعتبر سلسلة مترابطة من الأنشطة.

هذا وتعطى أغلب المؤسسات إهتماما" كبيرا" للمشروعات الإنشائية ومحاولة إتمامها فى مواعيدها المخططة، ذلك لأن أى تأخير فى إتمام مشروع عن الموعد المحدد له، يترتب عليه نتائج خطيرة، تختلف بإختلاف طبيعة وأهمية المشروع وأهدافه. يضاف الى ما سبق ضخامة الموارد المطلوبة لإتمام مثل هذا النوع من المشروعات الكبيرة، مما يجعل عملية الرقابة على التكاليف ذات أهمية بالغة.

لكل ذلك فكر الباحثون فى أسلوب يمكن من تخطيط ورقابة وتقييم المشروعات بأفضل كفاءة ممكنة، وقد توصل الباحثون الى أسلوب أطلقوا عليه إسم " أسلوب تقييم ومراجعة البرامج (بيرت) " كما توصل بعض الباحثين الى طريقة المسار الحرج Critical Path Method (C P M) .

هذا وترجع طريقة المسار الحرج الى أواخر عام ١٩٥٦، فى حين نشأ أسلوب بيرت خلال عام ١٩٥٨-١٩٥٩. ويعتبر أسلوب بيرت تطويرا" لطريقة المسار الحرج، لذلك فهما يتفقان فى المبادىء والإجراءات الأساسية ويختلفان فى أن أسلوب بيرت يهتم بكل الأنشطة فى حين أن طريقة المسار الحرج تركز على أنشطة المسار الحرج فقط، كما أن أسلوب بيرت يأخذ فى

الإعتبار الإحتمالات المصاحبة لتقديرات الوقت للأنشطة، ويتم تقدير ثلاثة أوقات لكل نشاط فى حين أن طريقة المسار الحرج تحدد تقديرا" واحدا" ثابتا" لوقت النشاط، أى لا تأخذ فى الإعتبار ظروف عدم التأكد.

وحيث أن الإجراءات الأساسية وقواعد رسم شبكة الأعمال وحساب أوقات الأنشطة، تتطابق تماما فى كلا الأسلوبين، فإنه يمكن القول أنهما يشكلان معا" أسلوبا" واحدا"، وتعتبر الفروق بين الأسلوبين فى الواقع فروق تاريخية. وعلى ذلك فسيتم تناول الأسلوبين على أنهما أسلوب واحد دون الفصل بينهما.

وقد نشأ أسلوب بيرت وإستخدم أولا للتحكم فى تقدم مشروع صواريخ بولاريس الأمريكية الذى أشترك فيه عدة آلاف من شركات المقاولات ، ويقال أن أستخدام أسلوب بيرت ساعد على تنسيق العمل بين هذا العدد الكبير من الشركات وإختصار مدة إتمام المشروع بنحو سنتين كاملتين. إلا أنه بعد ذلك بدأ إستخدام أسلوب بيرت فى الأغراض المدنية.

٢/٩-أهمية أسلوب بيرت فى مجال المحاسبة:

يعتبر أسلوب بيرت من الأساليب ذات الأهمية خاصة للمحاسبين لعدة مبررات منها:

أ- يساعد أسلوب بيرت/ تكلفة فى إعداد الموازنات التخطيطية للمشروعات وخاصة الموازنات النقدية.

ب- يساعد أسلوب بيرت / تكلفة أيضا فى إحكام الرقابة على التكاليف، وتهيئة الوسائل المناسبة لتقييم أداء الأفراد والأقسام المختلفة، مما يدعم بدرجة كبيرة نظام محاسبة المسئولية.

ج- يمكن أسلوب بيرت من إدخال عامل الوقت فى قياس الآداء وفى قياس وتحليل النتائج الفعلية، وبذلك لا يكون تركيز النظام المحاسبى على البيانات المالية فقط.

د- يساعد أسلوب بيرت على إتخاذ القرارات الرشيدة،

٩/ ٣-أستخدامات أسلوب بيرت:

هناك إستخدامات عديدة لأسلوب بيرت منها على سبيل المثال لا الحصر ما يلى:

- أعمال الإنشاءات أو التشييد الضخمة.
- أعمال الصيانة الضخمة.
- بناء السفن والترسانات البحرية.
- تخطيط تقديم منتج جديد أو تطوير منتج قائم.
- التخطيط المالى .
- غلق مصنع للتجديد الشامل أو إنشاء مصنع جديد.
- تصميم نظام جديد للحاسب الإلكترونى.
- عمليات التعدين.

يتضح مما سبق أن أسلوب بيرت يمكن إستخدامه فى تخطيط ورقابة وقت وتكاليف المشروعات. لذلك سنتناول فى هذه الوحدة دور أسلوب بيرت فى تخطيط ورقابة الوقت، وفى الوحدة التالية نتناول دور أسلوب بيرت فى تخطيط ورقابة التكاليف .

٩/ ٤- المفاهيم والمصطلحات الأساسية لأسلوب بيرت:

هناك بعض المفاهيم الأساسية المرتبطة بأسلوب بيرت وطريقة المسار الحرج والتى تتمثل فى الآتى:

أ - الحدث (Event):

وهو يمثل لحظة بدء نشاط معين أو الإنتهاء من تنفيذه، وهو لا يستنفد وقتا ولا تكلفة ولا موارد. ويعبر عنه فى شبكة الأعمال بدائرة داخلها رقم . وتأخذ الأحداث فى شبكة الأعمال أرقاما مسلسلة: ١ ، ٢ ، ٣ ..... الخ.

ب- النشاط (Activity):

ويمثل النشاط القيام بمهمة أو عمل معين، وهو بذلك يحتاج الى موارد (مال ووقت وجهد) ويصل النشاط بين حدثين، ويعبر عنه فى شبكة الأعمال بسهم عليه عادة حرف أبجدى، أو يعرف برقمى حدث البداية وحدث النهاية،

حيث الحدث الذى فى بداية (ذيل) السهم يمثل حدث البداية للنشاط والحدث الذى فى نهاية (رأس) السهم يمثل حدث النهاية للنشاط .أنظر شكل (١/٩).

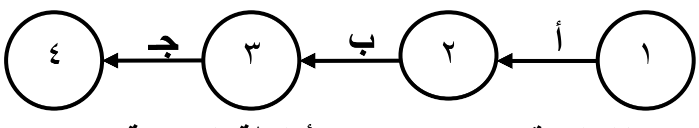


الشكل رقم (١/٩) يوضح الحدث والنشاط

من الرسم السابق يمكن التعبير عن النشاط الذى يربط بين الحدثين ١ ، ٢ بالرمز أ أو نقول النشاط (١-٢) أى النشاط الذى يبدأ من الحدث (١) وينتهى عند الحدث (٢) .

وهناك عدة أنواع للأنشطة منها:

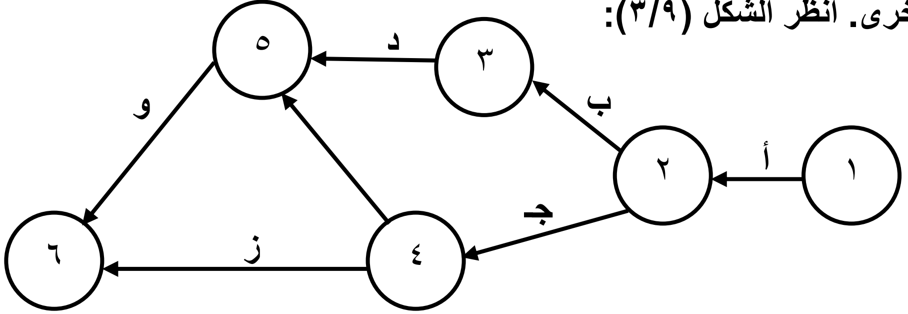
١- <u>أنشطة متتابعة</u>: وهى أنشطة تحدث بتسلسل وتعاقب محدد. أنظر الشكل رقم (٩ / ٢):



الشكل رقم (٢/٩) يوضح الأنشطة المتتابعة

من الرسم السابق ، نجد أن النشاط أ يحدث أولا" ثم يتبعه النشاط ب ثم جـ .

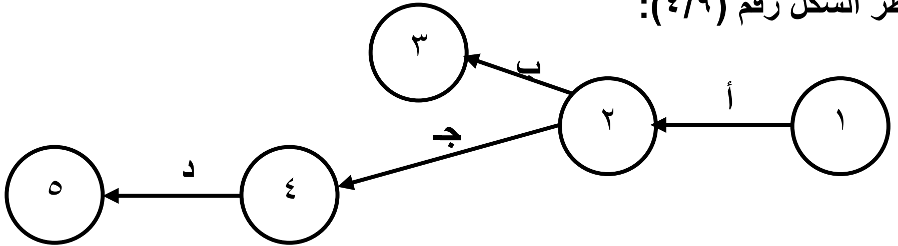
٢- <u>أنشطة متوازية</u> : وهى أنشطة يتم تنفيذها فى نفس وقت تنفيذ أنشطة أخرى. أنظر الشكل (٣/٩):



الشكل رقم (٣/٩) يوضح الأنشطة المتوازية

من الرسم السابق ، نجد أن الأنشطة ب ، د ، و تحدث فى نفس وقت تنفيذ الأنشطة جـ ، هـ ، ز .

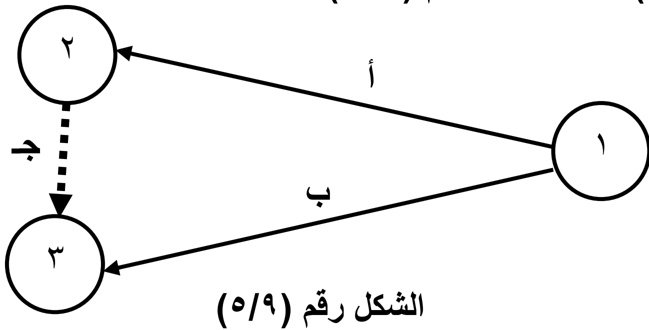
٣- **النشاط المعلق:** هو نشاط ينتهى بحدث ولا يوجد نشاط بعد هذا الحدث. أنظر الشكل رقم (٤/٩):



الشكل رقم (٤/٩) يوضح النشاط المعلق

فى الرسم السابق، نجد أن النشاط ب لا توجد أنشطة بعده، فهو يعتبر نشاط معلق.

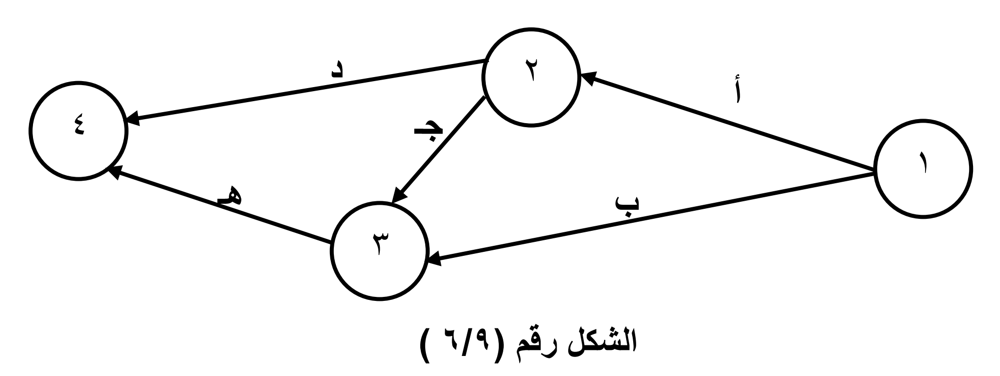
٤- **النشاط الوهمى:** هو نشاط صورى لا يمثل نشاطا" حقيقيا"، وبالتالى فهو لا يستغرق وقتا" (وقته صفر) ولا يستهلك موارد ولا تكلفة (تكلفته صفر)، ويرسم فى الشبكة لتحقيق العلاقات التتابعية بين الأنشطة، أو من أجل تفادى الربط بين حدثين بأكثر من نشاط، أو لربط الشبكة بعضها البعض. ولتمييز النشاط الوهمى عن النشاط الحقيقى، فإنه يرسم فى شكل سهم متقطع (- - - - ←). أنظر الشكل رقم (٥/٩):



الشكل رقم (٥/٩)

جـ- شبكة الأعمال:

هى رسم بيانى يوضح العلاقة بين الأحداث والأنشطة التى يتكون منها المشروع ، وتوضح شبكة الأعمال علاقات التتابع والتسلسل المنطقى والأسبقية بين الأنشطة ، وكذلك الوقت المطلوب لإنجاز كل نشاط . ويوضح الشكل رقم (٦/٩) التالى، شبكة الأعمال لمشروع يتكون من خمسة أنشطة (أ –ب- جـ - د – هـ) وأربعة أحداث (١-٢-٣-٤):



الشكل رقم (٦/٩)

د- المسار:

ويتمثل فى مجموعة من الأنشطة المتتابعة تبدأ من الحدث الأول فى المشروع وينتهى عند آخر حدث فى المشروع، وليس من الضرورى أن يمر المسار بجميع الأحداث على الشبكة، كما أنه ليس من الضرورى أن يمر المسار على أحداث مسلسلة. وبملاحظة الشكل السابق رقم (٦/٩) يمكن تحديد ثلاثة مسارات هى:

- **المسار الأول: أ ، د أى المسار الذى يتكون من النشاطين: (أ) و (د).أو المسار ١ ، ٢ ، ٤ . أى المسار الذى يمر بالأحداث ١ ، ٢ ، ٤ .**
- **المسار الثانى : أ ، جـ ، هـ أو ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ .**
- **المسار الثالث : ب ، هـ أو ١ ، ٣ ، ٤ .**

هـ - المسار الحرج :

هو أطول المسارات وقتا فى شبكة الأعمال. ويعبر مجموع أوقات أنشطة المسار الحرج عن أطول وقت يمكن أن يستغرقه المشروع. ويوجد فى كل شبكة أعمال مسار حرج واحد على الأقل، وقد يكون هناك أكثر من مسار حرج فى الشبكة الواحدة.

٩/ ٥ - قواعد رسم شبكة الأعمال بيرت:

هناك العديد من الإعتبارات التى يجب مراعاتها عند رسم شبكة بيرت من أهمها ما يلى:

أ- التحديد الدقيق لجميع أنشطة المشروع وعلاقات التتابع (التسلسل) المنطقية بينها.

ب- يجب أن تتضمن الشبكة حدثا" واحدا" للبداية وحدثا "واحدا" للنهاية.

ج- يجب أن يكون لكل نشاط حدث بداية واحد وحدث نهاية واحد. لكن يجوز أن تبدأ عدة أنشطة من حدث واحد أو تنتهى عدة أنشطة عند حدث واحد .

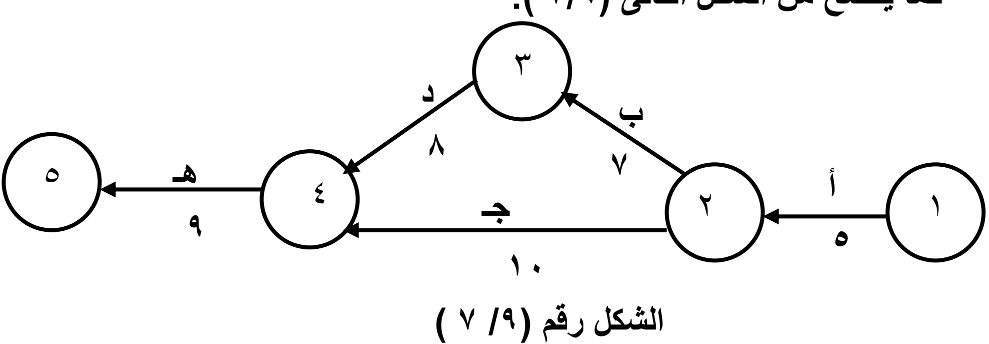
د- تحديد رقم لكل حدث، ويجب ألا يتكرر رقم الحدث أكثر من مرة واحدة على شبكة الأعمال. وكل حدث يجب أن يمثل نهاية نشاط (أو أكثر) سابق، وبداية نشاط (أو أكثر) لاحق، ماعدا حدث بداية المشروع فلا تسبقه أنشطة لأنه نقطة البداية، وحدث نهاية المشروع لا توجد أنشطة بعده لأنه يمثل نقطة النهاية.

ه- السهم المعبر عن النشاط، يكون متجها" من اليمين الى اليسار، ومن الرقم الأصغر للحدث الى الرقم الأكبر.

و- يجب التأكد عند رسم شبكة الأعمال من عدم وجود أنشطة معلقة .

ز- إذا تعددت الأنشطة السابقة لحدث ما، وكان ذلك الحدث نقطة نهاية لعدة مسارات، فإن وقت هذا الحدث يكون أطول وقت للمسارات التى تسبقه.

كما يتضح من الشكل التالى (٩/ ٧):



الشكل رقم (٩/ ٧)

فى الشكل السابق، الحدث رقم (٤) نهاية للنشاطين (جـ ، د) أى أنه لن يقع حتى يتم كلا النشاطين، وحيث ان النشاط (جـ) يتم بعد مرور ١٥ أسبوعا من بداية المشروع (٥ + ١٠) فى حين أن النشاط (د) ينتهى بعد مرور ٢٠ أسبوعا من بداية المشروع (٥+٧+٨) فيكون بذلك وقت حدوث الحدث (٤) هو ٢٠ أسبوعا من بداية المشروع، لأن الحدث (٤) لا يقع حتى يتم النشاطين (جـ ، د). وقد يترتب على ذلك حدوث فترات إنتظار لبعض الأنشطة. فمثلا

النشاط (هـ) لا يبدأ بعد إنتهاء النشاط (جـ) بل لابد أن ينتظر حتى يتم النشاط (د) ويقع الحدث (٤) الذى يرتبط بإنتهاء النشاطين (جـ ، د).

ح- يمكن إستحداث أى عدد من الأنشطة الوهمية لتحقيق تتابع الأنشطة ولتوفير النواحى الفنية والإدارية المختلفة.

ويمكن توضيح كيفية رسم شبكة الآعمال بيرت ، بإستخدام بيانات المثال التالى:

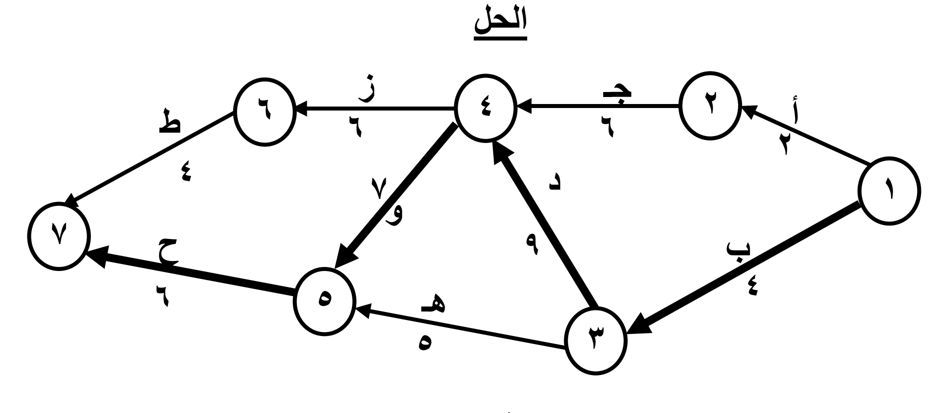
مثال :

يوضح الجدول التالى الأنشطة التى يتضمنها تنفيذ أحد المشروعات ومسارها والوقت المتوقع لكل نشاط:

النشاط	المسار	الوقت المتوقع
أ	١-٢	٢
ب	١-٣	٤
جـ	٢-٤	٦
د	٣-٤	٩
هـ	٣-٥	٥
و	٤-٥	٧
ز	٤-٦	٦
ح	٥-٧	٦
ط	٦-٧	٤

المطلوب: رسم شبكة الأعمال بيرت وتحديد المسار الحرج.

الحل



الشكل رقم (٩/ ٨)

كما سبق وتم تعريف المسار بأنه مجموعة أنشطة متتابعة، يبدأ من أول حدث فى المشروع وينتهى عند آخر حدث، ومن ثم يمكن تحديد المسارات التالية على الرسم السابق (٩/ ٨):

المسار	بالأنشطة	بالأحداث	الوقت بالأسبوع
الأول	أ جـ ز ط	١ ٢ ٤ ٦ ٧	١٨
الثانى	ا جـ و ح	١ ٢ ٤ ٥ ٧	٢١
الثالث	ب د ز ط	١ ٣ ٤ ٦ ٧	٢٣
الرابع	ب د و ح	١ ٣ ٤ ٥ ٧	٢٦
الخامس	ب هـ ح	١ ٣ ٥ ٧	١٥

يلاحظ أن جميع المسارات بدأت من الحدث رقم (١) وأنتهت عند آخر حدث على الشبكة رقم (٧). وأن المسار الحرج هو المسار الرابع صاحب أطول وقت .

٩/ ٦- تخطيط وقت الأنشطة :

يستخدم نموذج بيرت ثلاث تقديرات للوقت، يتم جمعهم إحصائيا" للتوصل الى تقديرات إحتمالية لوقت إتمام المشروع، وهذه التقديرات هى:

١- الوقت المتفائل (ف): Optimistic Time

ويمثل أقل وقت يمكن تنفيذ النشاط خلاله، بفرض أن الظروف مواتية، ويسير التنفيذ الفعلى للنشاط بشكل أحسن مما ينتظر عادة". وفى الواقع العملى تكون فرصة تحقق الوقت المتفائل قليلة.

٢- الوقت المتشائم (ش):Pessimistic Time

هو أطول وقت يمكن فيه إتمام النشاط بفرض أن الظروف غير مواتية، أى يتم التنفيذ الفعلى فى ظل أسوأ الظروف الممكنة. وأيضا تقل فى الواقع العملى فرصة إتمام النشاط فى هذا الوقت.

٣- الوقت الأكثر إحتمالا" (ح): Most –Probable Time

وهو الوقت الذى يأخذ فى الإعتبار الظروف المتوقعة للتنفيذ الفعلى، ولذلك تكون فرصة تحققه أكبر من فرصة تحقق الوقت المتفائل والوقت المتشائم.

وفى ضوء التقديرات الثلاثة السابقة للوقت، يتم حساب الوقت المتوقع (م) اللازم لإتمام النشاط والإنحراف المعيارى له (σ)، بإستخدام نموذج بيتا الإحتمالى – وهو نموذج إحصائى- كما يلى :

$$\text{الوقت المتوقع للنشاط} = \frac{\text{الوقت المتفائل} + (٤ \times \text{الوقت الأكثر إحتمالا}) + \text{الوقت المتشائم}}{٦}$$

$$\text{م} = \frac{\text{ف} + ٤\ \text{ح} + \text{ش}}{٦}$$

$$\text{الإنحراف المعيارى لوقت النشاط} = \frac{\text{الوقت المتشائم} - \text{الوقت المتفائل}}{٦}$$

$$\sigma = \frac{\text{ش} - \text{ف}}{٦}$$

وبعد تحديد الوقت المتوقع لكل نشاط، يتم كتابة هذا الوقت على السهم الممثل للنشاط تمهيدا" لتحديد المسارات المختلفة وأطوالها وبالتالى تحديد وقت إتمام المشروع والإحتمالات المختلفة المرتبطة بأوقات إتمام المشروع، بما يعمل على توفير المعلومات اللازمة لمساعدة الإدارة عند إتخاذ القرارات المختلفة المتعلقة بالمشروع.

ويمكن توضيح كيفية حساب الوقت المتوقع لكل نشاط وتحديد مسارات المشروع بالإسترشاد ببيانات المثال التالى الذى يوضح أنشطة أحد المشروعات وتقديرات الوقت لكل نشاط.

مثال :

توفرت لديك البيانات التالية اللازمة لتنفيذ أحد المشروعات:

النشاط	المسار	تقديرات الوقت بالأسبوع		
		المتفائل (ف)	الأكثر إحتمالا (ح)	المتشائم (ش)
أ	١ ــ ٢	٨	١١	٢٠
ب	١ ــ ٣	١٥	٢١	٢٧
جـ	١ ــ ٦	٢٥	٣٢	٥١
د	٢ ــ ٣	٦	٩	١٢
هـ	٢ ــ ٤	٨	١٦	٢٤
و	٣ ــ ٤	١٢	١٥	١٨
ز	٣ ــ ٥	١٤	١٨	٢٢
ح	٤ ــ ٥	٥	٧	٩
ط	٤ ــ ٧	١٨	٢٢	٢٦
ى	٥ ــ ٧	١٠	١٢	١٤
ك	٦ - ٧	١٨	٢٤	٣٠

المطلوب:

١- تحديد الوقت المتوقع والإنحراف المعيارى لكل نشاط .

٢- رسم شبكة بيرت .

٣- حساب الوقت اللازم لإتمام المشروع.

الحل

١- **حساب الوقت المتوقع (م) والإنحراف المعيارى(σ) للأنشطة :**

يحسب الوقت المتوقع والإنحراف المعيارى لكل نشاط، كما يظهر بالجدول التالى رقم (٦ /١) التالى ووفقا للعلاقتين التاليتين:

$$\text{الوقت المتوقع (م)} = \frac{\text{ف} + ٤\ \text{ح} + \text{ش}}{٦}$$

$$\text{الإنحراف المعيارى (σ)} = \frac{\text{ش} - \text{ف}}{٦}$$

جدول رقم(١/٩)

حساب الوقت المتوقع والإنحراف المعيارى للأنشطة

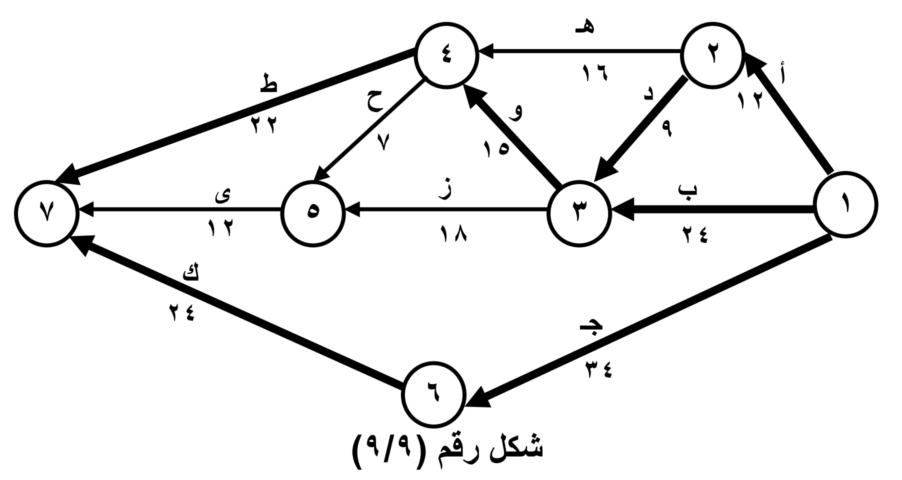
النشاط	ف	ح	ش	م	б
أ	٨	١١	٢٠	١٢	٢
ب	١٥	٢١	٢٧	٢١	٢
جـ	٢٥	٣٢	٥١	٣٤	٦/٢٦
د	٦	٩	١٢	٩	١
هـ	٨	١٦	٢٤	١٦	٦/١٦
و	١٢	١٥	١٨	١٥	١
ز	١٤	١٨	٢٢	١٨	٦/٨
ح	٥	٧	٩	٧	٦/٤
ط	١٨	٢٢	٢٦	٢٢	٦/٨
ى	١٠	١٢	١٤	١٢	٦/٤
ك	١٨	٢٤	٣٠	٢٤	٢

الوقت المتوقع للنشاط (أ) = $\frac{٨ + (٤ \times ١١) + ٢٠}{٦} = \frac{٧٢}{٦} = ١٢$

الإنحراف المعيارى للنشاط (أ) = $\frac{٢٠ - ٨}{٦} = ٢$

وهكذا بالنسبة لباقى الأنشطة.

٢- <u>رسم شبكة الأعمال بيرت:</u>



شكل رقم (٩/٩)

٣- حساب الوقت اللازم لإتمام المشروع:

لحساب الوقت اللازم لإتمام المشروع، يلزم تحديد المسارات التى تتكون منها شبكة بيرت، وأطول المسارات على الشبكة هو المسار الحرج ووقته هو الوقت اللازم لإتمام المشروع.

ومن الشكل رقم (٩/٩) السابق يمكن تحديد المسارات المحتملة على الشبكة على النحو التالى:

المسار	أنشطة المسار	وقت المسار بالأسبوع
الأول	أ هـ ط	٥٠
الثانى	أ د و ط	٥٨
الثالث	أ د و ح ى	٥٥
الرابع	أ هـ ح ى	٤٧
الخامس	أ د ز ى	٥١
السادس	ب و ط	٥٨
السابع	ب و ح ى	٥٥
الثامن	ب ز ى	٥١
التاسع	ج ك	٥٨

يلاحظ ما يلى:

- **هناك ثلاثة مسارات حرجة هى : أ د و ط ، ب و ط ، جـ ك . ووقت كل من هذه المسارات هو ٥٨ أسبوعا"، وبذلك يكون الوقت اللازم لإتمام المشروع هو ٥٨ أسبوعا.**
- **يجب على الإدارة التركيز على أنشطة المسارات الحرجة ومراقبتها لأن التأخير فى أحد أنشطة المسارات الحرجة ولو كان تأخيرا" بسيطا" فإنه يؤدى الى تأخير إتمام المشروع لمدة مماثلة للتأخير فى إتمام ذلك النشاط الحرج.**

٧/٩- حساب الوقت المبكر والوقت المتأخر والوقت الراكد:

تحتاج الإدارة المسئولة عن تنفيذ المشروع وجهات أخرى مختلفة، لبعض المعلومات عن أوقات وقوع الأحداث وبالتالى حدوث الأنشطة التى تربط بين هذه الأحداث، والأوقات التى يمكن إنتظار وقوع الأحداث بمقدارها دون تأثير على الوقت اللازم لإتمام المشروع. وتفيد هذه المعلومات فى حالة الرغبة فى إعادة جدولة الأنشطة أو إعادة توزيع الموارد المحدودة بهدف

إتمام المشروع فى أقل وقت ممكن وفى حدود الموارد المتاحة. ولتوفير هذه المعلومات يلزم حساب الأوقات المبكرة والمتأخرة والراكدة للأحداث وللأنشطة على النحو التالى:

٩/٧/١- الوقت المبكر للحدث:

هو الوقت الذى لا يمكن أن يبدأ النشاط قبله نظرا" لأرتباطه بالأنشطة السابقة له. وإذا تعددت الأنشطة السابقة لحدث معين، وكان ذلك الحدث نقطة نهاية لعدة مسارات، فإن الوقت المبكرلهذا الحدث يكون أطول وقت للمسارات التى تسبق الحدث. ويمكن حساب الوقت المبكر للحدث عن طريق إضافة الوقت المبكر للحدث السابق له على الوقت المتوقع للنشاط الذى يقع بين الحدثين.

وبناء على ذلك يمكن حساب الوقت المبكر للأحداث فى مثالنا السابق الذى يمثله الشكل رقم (٩/٩) خلال الجدول التالى:

الجدول رقم (٢/٩) حساب الوقت المبكر للأحداث

الحدث	المسارات المؤدية إليه	طول المسارات	الوقت المبكر للحدث
١	---	صفر	صفر
٢	أ	١٢	١٢
٣	أ د	١٢ + ٩ = ٢١	
	ب	٢١	٢١
٤	أ هـ	١٢ + ١٦ = ٢٨	
	أ د و	١٢ + ٩ + ١٥ = ٣٦	
	ب و	٢١ + ١٥ = ٣٦	٣٦
٥	ا هـ ح	١٢ + ١٦ + ٧ = ٣٥	
	أ د و ح	١٢ + ٩ + ١٥ + ٧ = ٤٣	
	ا د ز	١٢ + ٩ + ١٨ = ٣٩	
	ب ز	٢١ + ١٨ = ٣٩	
	ب و ح	٢١ + ١٥ + ٧ = ٤٣	٤٣
٦	جـ	٣٤	٣٤
٧	أ هـ ط	١٢ + ١٦ + ٢٢ = ٥٠	
	أ د و ح ى	١٢ + ٩ + ١٥ + ٧ + ١٢=٥٥	
	ب و ح ى	٢١ + ١٥ + ٧ + ١٢ = ٥٥	
	ب و ط	٢١ + ١٥ + ٢٢ = ٥٨	
	ب ز ى	٢١ + ١٨ + ١٢ = ٥١	
	جـ ك	٣٤ + ٢٤ = ٥٨	
	أ د و ط	١٢ + ٩ + ١٥ + ٢٢ = ٥٨	
	ا د ز ى	١٢ + ٩ + ١٨ + ١٢ = ٥١	
	أ هـ ح ى	١٢ + ١٦ + ٧ + ١٢ = ٤٧	٥٨

٧/٩ / ٢- الوقت المتأخر للحدث:

هو الوقت الذى يجب ألا يتأخر عنه تحقق الحدث، حتى يتم تنفيذ المشروع فى الوقت المحدد له دون تأخير.

ويتم حساب الوقت المتأخر للحدث على عكس طريقة حساب الوقت المبكر، وذلك بأن نبدأ من آخر حدث فى المشروع ونعود الى الخلف أى الى أول حدث فى المشروع. وعلى ذلك فإننا نبدأ بحساب الوقت

المتأخر للحدث الأخير فى المشروع، وحيث أنه لا توجد أحداث لاحقة له، فيكون وقته المتأخر هو نفسه وقته المبكر، وهو يمثل فى نفس الوقت طول المسار الحرج، الذى يمثل بدوره الوقت الكلى اللازم لإتمام المشروع.

ويحسب الوقت المتأخر لأى حدث (ما عدا الحدث الأخير) بطرح وقت النشاط الذى يعقب الحدث (المراد حساب وقته المتاخر) من الوقت المتأخر للحدث اللاحق. وفى حالة وجود أكثر من نشاط يعقب الحدث، معنى ذلك وجود عدة أوقات متأخرة لذلك الحدث، لذا نختار أقل وقت متأخر ، حتى يتسع الوقت لجميع الأنشطة اللاحقة للحدث كى تتم فى الوقت المحدد لها.

ويمكن حساب الأوقات المتأخرة للأحداث فى مثالنا السابق الممثل فى الشكل رقم (٨/٩) كما يظهر فى الجدول التالى رقم (٣/٩) التالى:

جدول رقم (٣/٩) حساب الوقت المتأخر للأحداث

الحدث	الأنشطة اللاحقة	الوقت المتأخر للحدث اللاحق – وقت النشاط اللاحق	الوقت المتأخر للحدث
٧	-------	-------	٥٨
٦	ك	٥٨ – ٢٤ =٣٤	٣٤
٥	ى	٥٨ – ١٢ = ٤٦	٤٦
٤	ح	٤٦ – ٧ = ٣٩	
	ط	٥٨ – ٢٢ = ٣٦	٣٦
٣	و	٣٦- ١٥ = ٢١	
	ز	٤٦ – ١٨ = ٢٨	٢١
٢	د	٢١ – ٩ = ١٢	
	هـ	٣٦ – ١٦ = ٢٠	١٢
١	أ	١٢ – ١٢ = صفر	
	ب	٢١ – ٢١ = صفر	
	جـ	٣٤ – ٣٤ = صفر	صفر

يلاحظ من الجدول السابق ما يلى:

- الوقت المتـأخر للحـدث الأخيـر (٧) هـو نفـس وقتـه المبكـر ٥٨ أسـبوعا". وكذلك الوقت المتأخر للحدث الأول (١) هو نفس وقته المبكر صفر.
- يعقب الحدث (٤) أكثر من نشاط وبذلك يكون له أكثر من وقت متـأخر، أقل هـذه الأوقـات ٣٦ أسـبوعا" ويعتبـر هـذا وقتـه المتـأخر. ونفـس الملاحظـة بالنسبة للأحداث أرقم ٣ ، ٢ ، ١ .

٣/٧/٩- الوقت الراكد للحدث :

هو الفتـرة التـى يمكـن تأجيـل وقـوع الحـدث بمقدارهـا دون أن يـؤثر ذلـك على الوقت الكلى لإتمام المشروع، أى دون أن يتـأخر وقـوع الأحـداث اللاحقـة للحدث عن موعدها المحدد. يتحدد الوقت الراكد للحدث بـالفرق بـين الوقـت المتأخر والوقت المبكر للحدث.

وعلى ضوء ما ورد فى الجدولين (٢/٩) ، (٣/٩) يمكن حساب الوقت الراكد للأحداث فى مثالنا السابق، كما يظهر فى الجدول رقم (٤/٩) التالى:

الجدول رقم (٤/٩) الوقت الراكد للأحداث

الحدث (١)	الوقت المتأخر (٢)	الوقت المبكر (٣)	الوقت الراكد (٤)= ٢-٣
١	صفر	صفر	صفر
٢	١٢	١٢	صفر
٣	٢١	٢١	صفر
٤	٣٦	٣٦	صفر
٥	٤٦	٤٣	٣
٦	٣٤	٣٤	صفر
٧	٥٨	٥٨	صفر

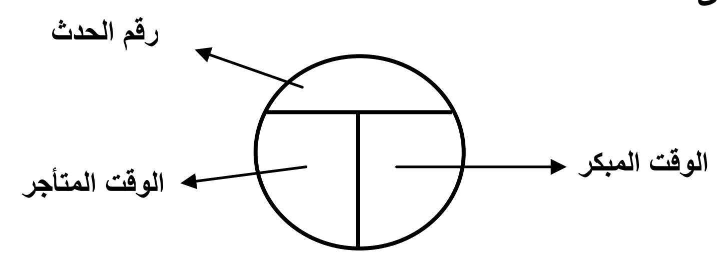
يلاحظ من الجدول رقم (٤/٩) السابق ما يلى:

- كـل الأحـداث – مـا عـدا الحـدث رقـم ٥ – لـيس لهـا وقـت راكـد وذلـك لأنهـا جميعا" تقع على المسار الحرج. ويرجـع ذلـك إلـى أن المسـار الحـرج يجـب ألا تتأخر أنشطته ولا أحداثه عن موعدها وإلا تأخر وقت المشروع ككل.

- الحدث رقم (٥) له وقت راكد (٣ أسابيع) لأنه لا يقع على المسار الحرج، وهذا يعنى أنه يمكن أن يتأخر عن موعده لمدة (٣ أسابيع) ولا يؤثر ذلك على وقت إتمام المشروع، حيث أنه خلال فترة التأجيل للحدث رقم (٥) تكون أنشطة المسارات سارية دون تأجيل.

وعلى ذلك يمكن القول بأن جميع الأحداث التى تقع على المسار الحرج، لا يكون لها وقت راكد.

ويمكن توضيح الأوقات المبكرة والمتأخرة على شبكة الأعمال، وذلك بتقسيم دائرة الحدث الى ثلاثة أجزاء الجزء العلوى لرقم الحدث والجزء الأيمن للوقت المبكر والجزء الأيسر من أسفل للوقت المتأخر كما يتضح من الشكل التالى:



٤/٧/٩- الوقت المبكر والمتاخر والراكد للأنشطة:

تحسب الأوقات المبكرة والمتأخرة والراكدة للأنشطة، حتى تكون أمام الإدارة صورة واضحة تمكنها من إعادة جدولة الأنشطة بما يتناسب مع الموارد المتاحة.

أولا: الوقت المبكر للنشاط:

حيث أن النشاط يمثل عملا" فعليا" بستغرق وقتا"، فإنه يكون له وقت بداية ووقت نهاية- بعكس الحدث الذى له وقت واحد فقط لأنه يمثل لحظة زمن تعبر عن بداية أو نهاية نشاط معين- وعلى ذلك فإنه يحسب لكل نشاط وقت مبكر للبداية ووقت مبكر للنهاية. ويتم الإستفادة من الأوقات المبكرة للأحداث فى حساب الوقت المبكر للأنشطة على النحو التالى:

أ- الوقت المبكر لبداية النشاط:ويعبر عن الوقت الذى لا يمكن للنشاط أن يبدأ قبله، إما لنواحى فنية أو لعدم إتمام الأنشطة السابقة له. ويتحدد الوقت المبكر لبداية النشاط بالوقت المبكر للحدث الذى يبدأ عنده هذا النشاط.

ب- الوقت المبكر لنهاية النشاط:يعبر عن الوقت الذى لا يمكن للنشاط أن ينتهى قبله إذا تم العمل وفقا لما هو مخطط دون إسراع فى الآداء، ويحسب كما يلى :

الوقت المبكر لنهاية النشاط =
الوقت المبكر لبداية النشاط + الوقت المتوقع لذلك النشاط.

ثانيا: الوقت المتأخر للنشاط:

يمكن أيضا حساب وقت متاخر لبداية النشاط ووقت متأخر لنهاية النشاط، وذلك على النحو التالى:

أ- الوقت المتأخر لبداية النشاط:يعبر عن الوقت الذى يجب ألا تتأخر عنه بداية النشاط وإلا ترتب على ذلك تأخر إتمام النشاط عن موعده المخطط وبالتالى التأثير على مواعيد بداية الأنشطة اللاحقه له.

ويكون الوقت المتأخر لبداية النشاط =
الوقت المتأخر للحدث الذى عنده ينتهى النشاط – الوقت المتوقع للنشاط.

ب- الوقت المتأخر لنهاية النشاط:يعبر عن الوقت الذى يجب ألا تتأخر نهاية النشاط عنه وإلا ترتب على ذلك تأخر بداية الأنشطة اللاحقة له، بصورة يترتب عليها تأخر إتمام المشروع عن موعده المحدد.ويتحدد الوقت المتأخر لنهاية النشاط بالوقت المتأخر للحدث الذى عنده ينتهى هذا النشاط.

ثالثا: الوقت الراكد للنشاط:

هو ذلك الوقت الذى يمكن تأجيل النشاط بمقداره دون أن يؤثر ذلك على إتمام المشروع فى وقته المبكر المحدد. ويحسب على النحو التالى:

الراكد الكلى = الوقت المتأخر لنهاية النشاط – الوقت المبكر لنهاية النشاط.
أو = الوقت المتأخر لبداية النشاط – الوقت المبكر لبداية النشاط.

رابعا: الوقت الراكد الحر:

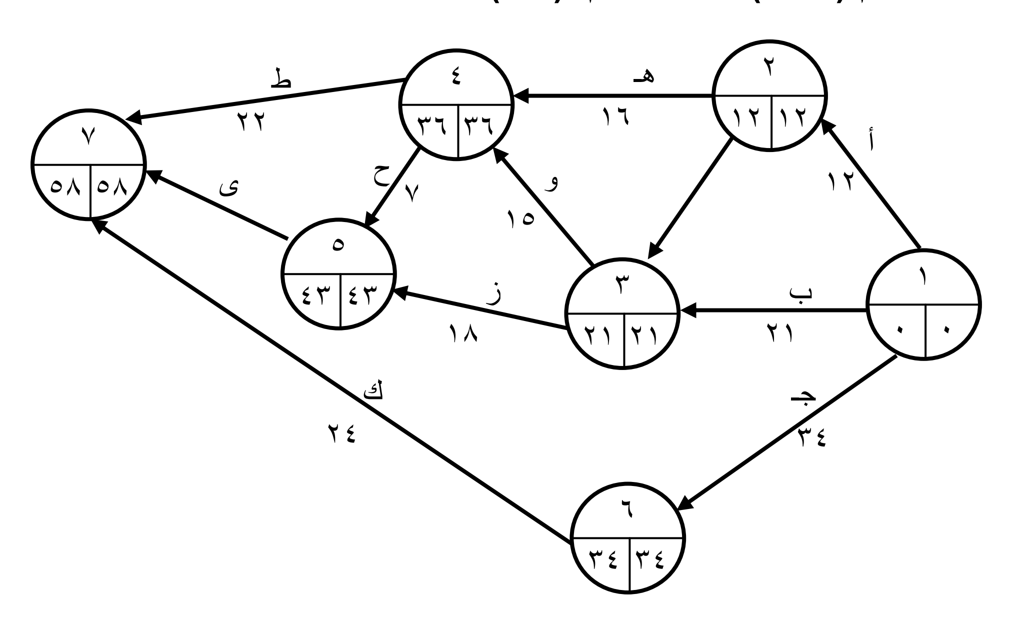
هو ذلك الوقت الذى يمكن تأجيل تنفيذ النشاط بقداره، دون أن يؤدى هذا الى تحويل المسارات شبه الحرجة الى مسارات حرجة. ويحسب كما يلى:

الراكد الحر = الوقت المبكر لحدث نهاية النشاط - الوقت المبكر لحدث بداية النشاط – الوقت المتوقع.

يتضح مما سبق أهمية معرفة الوقت الراكد الكلى والراكد الحر، فالنشاط صاحب الوقت الحر يمكن تأجيل تنفيذه بمقدار الراكد الحر دون الحاجة الى البحث عن أثر ذلك على الأنشطة الأخرى ،لأنه لن يؤثر عليها.

أما الراكد الكلى فقد يترتب على تأجيل النشاط بمقداره، ظهور مسارات حرجة أخرى أو التأثير على أوقات إتمام أنشطة أخرى.

ويمكن على ضوء ما سبق حساب الوقت المبكر والمتأخر والراكد للأنشطة وإظهارها على الشبكة بالتطبيق على المثال السابق كما يظهر فى الشكل رقم (٩/١٠) والجدول رقم (٩/٥) التاليين:



الشكل رقم (٩/١٠)

جدول رقم (٩/٥)

النشاط (١)	المسار (٢)	الوقت المتوقع (٣)	الوقت المبكر: بداية (٤)	الوقت المبكر: نهاية (٥)=٣+٤	الوقت المتأخر: بداية (٦)= ٧-٣	الوقت المتأخر: نهاية (٧)	الوقت الراكد الكلى (٨)= ٧-٥ أو ٦-٤
أ *	١-٢	١٢	٠	١٢	٠	١٢	٠
ب *	١-٣	٢١	٠	٢١	٠	٢١	٠
جـ*	١-٦	٣٤	٠	٣٤	٠	٣٤	٠
د*	٢-٣	٩	١٢	٢١	١٢	٢١	٠
هـ	٢-٤	١٦	١٢	٢٨	٢٠	٣٦	٨
و*	٣-٤	١٥	٢١	٣٦	٢١	٣٦	٠
ز	٣-٥	١٨	٢١	٣٩	٢٨	٤٦	٧
ح	٤-٥	٧	٣٦	٤٣	٣٩	٤٦	٣
ط*	٤-٧	٢٢	٣٦	٥٨	٣٦	٥٨	٠
ى	٥-٧	١٢	٤٣	٥٥	٤٦	٥٨	٣
ك*	٦-٧	٢٤	٣٤	٥٨	٣٤	٥٨	٠

↓ من الشبكة (العمود ٤) — ↓ من الشبكة (العمود ٧)

ملاحظات على الجدول رقم (٩ / ٥) :

١- **العمود رقم (٤)يمثل وقت البداية المبكر للنشاط، وهو عبارة عن الوقت المبكر لحدث بداية النشاط (الجزء الأيمن السفلى فى الدائرة التى عند بداية النشاط فى الشكل (٩/٩).**

٢- **العمود (٥) = العمود (٤) + العمود (٣).**

٣- **العمود (٧) يمثل الوقت المتأخر لنهاية النشاط ، وهو عبارة عن الوقت المتأخر لحدث نهاية النشاط . (الجزء الأيسر السفلى فى الدائرة التى فى نهاية النشاط فى الشكل (٩/٩).**

٤- **العمود (٦) = العمود (٧) - العمود (٣).**

٥- **العمود (٨) = العمود (٧) – العمود (٥) أو العمود (٦) – العمود (٤).**

٦- **الأنشطة أ ، ب ، جـ ، د ، و ، ط ، ك. ليس لها وقت راكد لأنها تقع على المسار الحرج، ولأنه لا يمكن تأجيلها وإلا زادت فترة إتمام المشروع عن الوقت المحدد له.**

٨/٩- دراسة إحتمال تنفيذ المشروع فى مدة معينة (وقت مستهدف) أو بموازنة معينة:

من المعروف أن أوقات الأنشطة فى أسلوب بيرت أوقات إحتمالية وليست مؤكدة. وعلى ذلك فإن الوقت الفعلى لكل نشاط قد يتفق مع هذه الأوقات أو لا يتفق معها، وبالتالى فإن المشروع قد يتم وفقا للأوقات المخططة أوقد لا يتم خلالها.

وغالبا ما يتم التعاقد على تنفيذ المشروع فى ضوء الوقت المحسوب لإتمام المشروع فى ظل الأوقات الإحتمالية، لذلك فإنه يكون من الضرورى دراسة إحتمال إتمام المشروع طبقا للأوقات المخططة من عدمه. حيث أن التأخير فى التنفيذ قد يترتب عليه نتائج غير مستحبة كغرامات تأخير مثلا"، وكذلك الإسراع فى التنفيذ قد يترتب عليه تحمل تكاليف أكبر.

ولحساب إحتمال إتمام المشروع فى وقت معين فإنه من الضرورى معرفة الإنحراف المعيارى لوقت المشروع، ولما كان المسار الحرج يمثل الوقت اللازم لإتمام المشروع، فإن الإنحراف المعيارى لوقت المشروع يتمثل فى الإنحراف المعيارى لوقت المسار الحرج. (فى حالة وجود أكثر من مسار حرج يتم إختيار المسار الحرج صاحب أكبر إنحراف معيارى). وفى ضوء معرفة الوقت المتوقع لإتمام المشروع والإنحراف المعيارى لوقت المشروع وبإستخدام منحنى التوزيع الطبيعى لوقت إتمام المشروع وجداول توزيع الإحتمال الطبيعى، يمكن توفير معلومات هامة منها:

- إحتمال إتمام المشروع خلال فترة زمنية محددة.
- إحتمال إتمام المشروع بعد وقته المخطط بمدة معينة.
- إحتمال إتمام المشروع بموازنة معينة.

ولما كان إحتمال حدوث المتوسط الإحصائى فى كثير من جداول التوزيعات الإحتمالية الطبيعية هو ٥٠ % فإنه يمكن القول بأن إحتمال إتمام المشروع خلال الزمن المخطط للإنتهاء من المسار الحرج يكون أيضا ٥٠%.

ولحساب هذا الإحتمال يمكن إستخدام قانون المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعى، وذلك بحساب Z التى تمثل القيمة المعيارية لوحدة القياس فى جدول التوزيع الطبيعى وسنرمز لها بالرمز (ق) وتحسب كما يلى:

$$ق = \frac{\text{الوقت المستهدف} - \text{طول المسار الحرج}}{\text{الإنحراف المعيارى لوقت المشروع}}$$

وبحساب قيمة (ق) يتم الكشف عن الإحتمال المقابل لها من واقع جدول توزيع الإحتمال الطبيعى، ثم يتم جمع (أو طرح) ٥٠% على هذا الإحتمال لنحصل على إحتمال إتمام المشروع خلال الوقت المستهدف أو بموازنة معينة. ويمكن تلخيص كيفية تحديد إحتمال إتمام المشروع خلال زمن معين أو بموازنة معينة فى الخطوات التالية:

١- **حساب الإنحراف المعيارى لأنشطة المسار الحرج، (ش – ف) / ٦.**

٢- **حساب الإنحراف المعيارى لوقت المشروع =**

$$\sqrt{\text{مجموع مربعات الإنحرافات المعيارية لأنشطة المسار الحرج}}$$

٣- **حساب قيمة (ق).**

٤- **الكشف عن قيمة (ق) وتحديد الإحتمال المقابل لها.**

٥- **إحتمال إتمام المشروع خلال الوقت المستهدف = ٥٠% ± الإحتمال المقابل لقيمة (ق).**

٦- **إحتمال إتمام المشروع خلال وقت يزيد عن الوقت المستهدف =**
١٠٠% - إحتمال إتمام المشروع خلال الوقت المستهدف.

٩/٩- وقت إتمام المشروع باحتمال أو بدرجة ثقة معينة:

قد يكون طلب الإدارة حساب وقت إتمام المشروع باحتمال (درجة ثقة) معين فيتم حساب ذلك باعلاقة التالية:

وقت إتمام المشروع بدرجة ثقة محددة
= وقت المسار الحرج ±[معامل ثابت مقابل لدرجة الثقة المطلوبة × الانحراف المعياري لوقت المشروع]

ويوضح الجدول التالي رقم (٦/٩) بعض المعاملات الثابتة المستخرجة من جدول لتوزيع الاحتمال الطبيعي بحسب درجات ثقة معينة.

درجة الثقة	المعامل الثابت (ق)
٦٠%	٠,٣٥ انحراف معياري
٨٠%	٠,٨٤ انحراف معياري
٨٤%	١,٠٠ انحراف معياري
٩٠%	١,٢٨% انحراف معياري
٩٥%	١,٦٤ انحراف معياري
٩٩%	٢,٢٢ انحراف معياري

وفى ضوء ما تقدم يمكن فى مثالنا السابق، الإجابة على الإستفسارات التالية:

١. **ماهو الإنحراف المعيارى لوقت إتمام المشروع ؟**
٢. **ماهو إحتمال إتمام المشروع خلال ٦٠ أسبوعا" ؟**
٣. **ماهو إحتمال إتمام المشروع خلال مدة تزيد عن ٦٠ أسبوعا ؟**
٤. **ما هو احتمال إتمام المشروع بموازنة إجمالية ١٢٨٠٠٠ج إذا كانت التكلفة التقديرية للأسبوع ٢٠٠٠ج.**
٥. **ما هو وقت إتمام المشروع بدرجة ثقة ٩٠%.**

الإجابة

أولا: الإنحراف المعيارى لوقت إتمام المشروع:

هناك ثلاثة مسارات حرجة فى شبكة بيرت، لذلك تحسب الإنحرافات المعيارية للثلاثة مسارات ثم نأخذ أكبر إنحراف معيارى ليعبر عن الإنحراف المعيارى لوقت إتمام المشروع .

المسارات هى : ب و ط ، جـ ك ، أ د و ط

ويمكن إستخراج الإنحرافات المعيارية لهذه الأنشطة من الجدول رقم (٦/٩) السابق.

المسار الأول : ب و ط :

الإنحراف المعيارى : $\sqrt{٤ + ١ + ٣٦/٦٤}$ = ٢.٦

المسار الثانى: جـ ك:

الإنحراف المعيارى: $\sqrt{(٢٦ /٦)^{٢} + ٤}$ = ٤,٧٧٣

المسار الثالث : أ د و ط :

الإنحراف المعيارى : $\sqrt{٤ + ١ + ١ + ٣٦/٦٤}$ = ٣.٠٢٦

أى أن <u>الإنحراف المعيارى لوقت إتمام المشروع = ٤,٧٧٣ .</u>

ثانيا : <u>إحتمال إتمام المشروع خلال ٦٠ أسبوعا"</u> :

$$ق = \frac{٦٠ - ٥٨}{٤,٧٧٣}$$ = ٠,٤١٩ أو ٠,٤٢ تقريبا"

الرقم المقابل من الجدول = ٠,١٦٢٨ أى الإحتمال = ٠,١٦٢٨ + ٠,٥٠ = ٦٦ % تقريبا".

ثالثا: إحتمال إتمام المشروع خلال مدة تزيد عن ٦٠ أسبوعا" =

١٠٠% - ٦٦ % = ٣٤ % .

رابعاً: احتمال إتمام المشروع بموازنة قدرها ١٢٨٠٠٠ج إذا علمت أن التكلفة التقديرية للأسبوع ٢٠٠٠ج.

بقسمة الموازنة الإجمالية ÷ التكلفة الأسبوعية تنتج المدة المطلوب حساب احتمال إتمام المشروع خلالها ثم يتم حساب الاحتمال كما سبق في الخطوة السابقة.

مدة إتمام المشروع بموازنة ١٢٦٠٠٠ = ١٢٦٠٠٠ ÷ ٢٠٠٠ = ٦٤ اسبوع

∴ ق = (٦٤ – ٥٨) ÷ ٤,٧٧٣ = ٦ ÷ ٤,٧٧٣ = ١,٢٦

الرقم المقابل من الجدول = ٠,٣٩٦٢

∴ الاحتمال = ٠,٥٠ + ٠,٣٩٦٢ = ٠,٨٩٦   ٩٠% تقريباً

خامساً: وقت إتمام المشروع بدرجة ثقة ٩٠%

= ٥٨ + (١,٢٨ × ٤,٧٧٣) = ٥٨ + ٦,١١ = ٧٤,١١ أسبوع

الفصل العاشر

تخطيط ورقابة التكاليف باستخدام أسلوب بيرت

تناولنا في الفصل السابق مفهوم أسلوب بيرت وكيفية الاستفادة منه في تخطيط وقت المشروع، لكننا لم نتعرض للعلاقة بين وقت وتكلفة المشروع، فالتكلفة تعتبر عنصراً هاماً عند تخطيط المشروع، إذ لا يكفي فقط تخطيط وقت المشروع دون مراعاة حجم الموارد المتاحة وحجم الموارد المطلوبة للمشروع.إن توفير معلومات عن علاقة وقت المشروع بتكلفته يعتبر أمراً هاماً وضرورياً للإدارة حيث يساعدها على الموازنة بين إتمام المشروع في وقت أقل وبتكلفة عالية أو في الوقت المخطط وبتكلفة أقل.

ونتناول في هذا الفصل كيفية الاستفادة من أسلوب بيرت في تخطيط ورقابة تكاليف المشروعات وهو ما يعرف باسم بيرت تكلفة PERT-COST حيث يفيد أسلوب بيرت/ تكلفة في توفير المعلومات التي ترشد الإدارة عند اتخاذ عديد من القرارات مثل:

- قرار المفاضلة بين إتمام المشروع في وقته المخطط والذي قد يكون أطول من الوقت المتعاقد عليه، وتحمل غرامات وجزاءات تأخير، وبين الإسراع في تنفيذ المشروع حتى يتم خلال الوقت المتعاقد عليه وتحمل تكاليف إضافية مقابل الإسراع.
- قرار المفاضلة بين الإسراع في إتمام المشروع وتشغيله للحصول على أرباح مبكرة، مع تحمل تكاليف إضافية وبين إتمام المشروع في وقته المخطط وفقد هذه الأرباح المبكرة وعدم تحمل تكاليف إضافية.
- قرار استخدام موارد إضافية أو إعادة توزيع الموارد المتاحة بين الأنشطة المختلفة.

١٠/١: علاقة تكاليف النشاط بالوقت:

من الأمور الأساسية لاستخدام أسلوب بيرت/ تكلفة ضرورة التعرف على علاقة تكاليف كل نشاط بوقت النشاط، حيث على ضوء هذه العلاقة يمكن تخطيط ورقابة تكاليف الأنشطة بالارتباط بوقت كل نشاط.

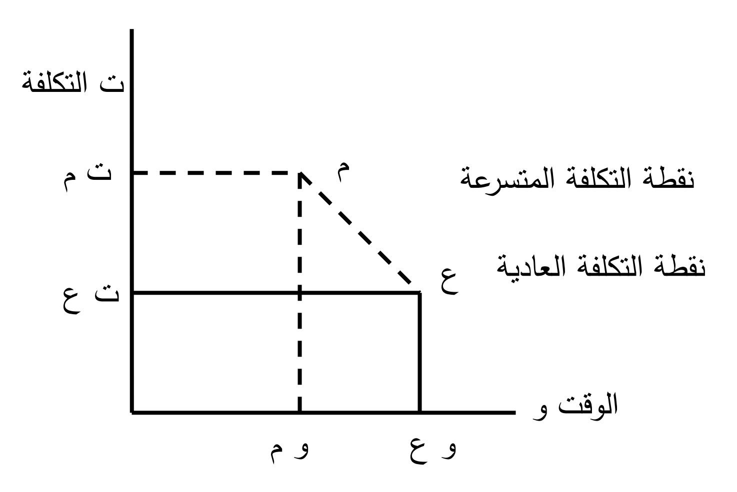
يمكن تقسيم تكاليف الأنشطة من حيث علاقتها بالنشاط إلى مجموعتين، تتمثل المجموعة الأولى في تكاليف مباشرة على النشاط يمكن تخصيصها له بدقة وسهولة، واعتبارها من مسئولية النشاط وتحمل عليه مباشرة، مثل تكاليف المواد المستخدمة في النشاط وأجور العمال المخصصين للقيام بهذا النشاط بما فيها أجور المشرف على هؤلاء العمال، وإهلاك وإيجار الآلات المخصصة لهذا النشاط، وتتمثل المجموعة الثانية في تكاليف غير مباشرة تحدث من أجل المشروع (الأنشطة) ككل وبالتالي يصعب ربطها وتخصيصها لنشاط معين مثل مرتبات إدارة المشروع وتكاليف المنافع العامة، وإهلاك الإنشاءات المؤقتة لإيواء العمال والمشرفين والمهندسين.

كذلك يمكن تقسيم تكاليف الأنشطة من حيث علاقتها بحجم النشاط إلى مجموعتين هما:

١- تكاليف متغيرة Variable Costs :

يتغير مجموعها مع تغير حجم النشاط، أي كلما زاد حجم العمل زاد مجموع التكاليف، مثل تكلفة المواد وأجور العمال، وهذه التكاليف علاقتها مع وقت النشاط علاقة عكسية فإذا قل وقت النشاط (يعني زاد حجم العمل نظراً لمحاولة إنجاز نفس العمل في وقت أقل) يزيد مجموعها حيث قد يتحمل المشروع أجور عمال إضافية أعلى من الأجور العادية، أو شراء المواد الخام بسعر أعلى والعكس إذا زاد وقت النشاط يعنى قل حجم العمل حيث سيتم إنجاز نفس العمل في وقت أطول، يقل مجموعها حيث قد يتم استخدام عمالة أقل مهارة، الانتظار وشراء المواد بسعر أقل.

يوضح الشكل التالي علاقة التكاليف المتغيرة بوقت النشاط.



(شكل ١٠/١)
يوضح علاقة التكلفة المتغيرة بوقت النشاط

يتضح من الشكل السابق (١٠/١) أن العلاقة بين وقت النشاط وتكلفته المتغيرة علاقة عكسية ، فمع انخفاض الوقت من و ع إلى و م زادت التكلفة من ت ع إلى ت م حيث:

و ع= الوقت العادي للنشاط Normal Time وهو أطول وقت مسموح به لإتمام النشاط أو هو الوقت الطبيعي لإتمام النشاط.

ت ع= التكلفة العادية للنشاط Normal Cost أي أقل تكلفةلإتمام النشاط فى وقته العادي.

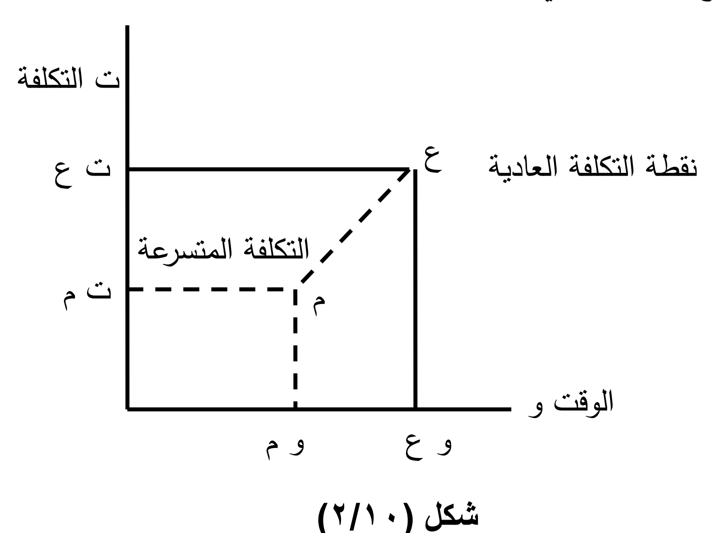
و م= الوقت المتسرع للنشاط Crash Time ويمثل أقصر وقت يمكن إتمام النشاط خلاله.

ت م= التكلفة المتسرعة للنشاط Crash Cost وتمثل أقصى تكلفة للنشاط، أي تكلفة إتمام النشاط في وقته المتسرع.

٢- تكاليف ثابتة: Fixed Costs

لا يتغير مجموعها مع تغير حجم النشاط، أي لا يزيد مبلغها مع زيادة حجم العمل خلال نفس الفترة ولا ينقص مع نقص حجم العمل. حيث أنها ترتبط بالزمن لذلك تسمى تكاليف زمنية Period Costs فإذا انخفض وقت النشاط يقل مجموعها وإذا زاد وقت النشاط يزيد مجموعها مثل إيجار المعدات ومرتبات الملاحظين وإيجار المخازن، فكل هذه البنود مرتبطة بالزمن لا بحجم الاستفادة، منها فإيجار المعدات مرتبط أساساً بفترة الإيجار لا بكمية العمل خلال فترة الإيجار.

ويوضح الشكل التالي العلاقة بين التكاليف الثابتة ووقت النشاط.



شكل (٢/١٠)

يوضح العلاقة بين التكاليف الثابتة ووقت النشاط.

يتضح من الشكل السابق (٢/١٠) أن العلاقة بين وقت النشاط والتكاليف الثابتة للنشاط علاقة طردية، فإذا أمكن تقصير وقت النشاط من (و م) إلى (و ع) يقل مبلغ التكلفة الثابتة للنشاط من (ت ع) إلى (ت م).

على ضوء ما سبق يتضح أن التكلفة المتغيرة للنشاط تزيد مع نقص وقت النشاط وتقل مع زيادة وقت النشاط، وبالعكس فإن التكلفة الثابتة للنشاط تزيد مع زيادة وقت النشاط وتقل مع نقص وقت النشاط. وعلى ذلك فإن سلوك التكلفة الكلية للنشاط سيتوقف على نسبة التكاليف المتغيرة ونسبة التكاليف

الثابتة إلى إجمالي تكلفة النشاط، فإذا كانت التكاليف المتغيرة تمثل الجزء الأكبر فإن تكلفة النشاط ككل تزيد من تقصير وقت النشاط (وبالعكس)، أما إذا كانت التكاليف الثابتة للنشاط تمثل الجزء الأكبر من تكلفة النشاط، فإن تكلفة النشاط ككل تقل مع نقص وقت النشاط (وبالعكس).

ونظراً لأن الجزء الأكبر من تكاليف النشاط يتمثل غالباً في التكاليف المباشرة المتغيرة (قد لا ينطبق هذا الفرض على جميع الأنشطة) فإنه يمكن القول بأن التكاليف الكلية للنشاط تتغير مع تغير وقت النشاط ولكن بعلاقة عكسية، وللتسهيل العملي تقرب العلاقة بين الوقت والتكلفة باستخدام الخط المستقيم الذي يصل نقطة الوقت المتسرع بالتكلفة المتسرعة ونقطة الوقت العادي بالتكلفة العادية. وهذا يعني أن العلاقة بين الوقت والتكلفة علاقة خطية Linear relation وهذا يعني أيضاً أن معدل الزيادة في تكلفة النشاط بسبب تخفيض الوقت ثابت لا يتغير مع تغير وقت النشاط أي أن ميل التكلفة Cost slope ثابت وهذا راجع لفرض الخطية.

يتمثل ميل التكلفة في مقدار التغير في تكلفة النشاط نتيجة تغير وقت هذا النشاط بوحدة زمنية واحدة (يوم/ أسبوع...) ويحسب ميل التكلفة كما يلي:

$$\text{ميل التكلفة} = \frac{\text{التغير في التكلفة}}{\text{التغير في الوقت}}$$

$$= \frac{\text{التكلفة المتسرعة} - \text{التكلفة العادية}}{\text{الوقت العادي} - \text{الوقت المتسرع}} = \frac{\text{ت م} - \text{ت ع}}{\text{و ع} - \text{و م}}$$

٢/١٠: تقصير وقت إتمام المشروع بأقل تكلفة:

قد تفكر الإدارة (كما سبق القول) في ظروف معينة في اتخاذ قرار بالإسراع في إتمام المشروع ومحاولة تنفيذه في فترة أقل من الفترة العادية، وحتى يمكن للإدارة اتخاذ مثل هذا القرار فإنه يلزم إمدادها بمعلومات كافية عن الزيادة في التكاليف التي ينتظر تحملها نتيجة هذا الإسراع، وما هي

البدائل الممكنة للإسراع في التنفيذ،وما هي تكلفة كل بديل، وذلك حتى يمكن للإدارة المفاضلة بين هذه البدائل واختيار أقلها تكلفة.

ولتوفير مثل هذه المعلومات من خلال استخدام أسلوب بيرت/ تكلفة تتبع الخطوات التالية:

١- رسم شبكة بيرت وتحديد المسار الحرج والوقت المبكر والمتأخر والراكد لكل نشاط.
٢- تحديد الفترة المراد تقصير وقت إتمام المشروع بمقدارها.
٣- حساب ميل التكلفة للأنشطة.
٤- تقصير وقت المشروع عن طريق تخفيض الوقت اللازم لإتمام نشاط أو أكثر وذلك باختيار البديل الذي يترتب عليه أقل زيادة في التكاليف ونستمر في عملية تقصير وقت المشروع حتى نصل إلى المدة المطلوب تنفيذ المشروع خلالها طبقاً للتعاقد أو طبقاً لطلب الإدارة.

هذا ولتطبيق الخطوات السابقة ولتوفير المعلومات المناسبة للإدارة يلزم مراعاة الاعتبارات التالية:

١- يتم تخفيض وقت الأنشطة الحرجة (التي على المسار الحرج) لأن تخفيض وقت الأنشطة غير الحرجة يترتب عليه تحمل تكاليف إضافية دون فائدة حيث لن ينخفض وقت إتمام المشروع.
٢- عند الرغبة في تخفيض وقت المسار الحرج نبدأ بتخفيض وقت النشاط الذي له أقل ميل تكلفة ضمن أنشطة المسار الحرج.
٣- عند تخفيض وقت أي نشاط يراعى أن فترة التخفيض ليست بلا حدود، بل تتحدد بالفرق بين الوقت العادي والوقت المتسرع للنشاط لأن الاعتبارات الفنية تمنع تقصير وقت النشاط عن وقته المتسرع.
٤- قد يترتب على تخفيض وقت أحد الأنشطة الحرجة ظهور مسار حرج أخر (أو تحول المسار الحرج) ففي هذه الحالة يلزم تخفيض وقت جميع المسارات الحرجة، في وقت واحد وبنفس المدة.

وتحقيق ذلك يتطلب دراسة البدائل الممكنة واختيار أقلها تكلفة، فقد يتم تخفيض وقت نشاط من كل مسار حرج وبنفس المدة، وقد يتم اختيار نشاط

يشترك بين المسارات الحرجة يكون ميل تكلفته أقل من مجموع ميل التكلفة لأكثر من نشاط كل نشاط على مسار حرج مختلف.

هذا ويمكن توضيح كيفية تقصير وقت المشروع على ضوء القواعد والاعتبارات السابقة من خلال المثال التالي:

مثال (١):

فيما يلي بعض البيانات الخاصة بوقت وتكاليف أنشطة أحد المشروعات لإحلال آلات أحد المصانع.

النشاط	الأحداث	تقديرات الوقت بالأسبوع		التكلفة بالجنيه	
		عادي	متسرع	عادية	متسرعة
أ	١-٢	٦	٤	٣٦٠٠	٤٦٠٠
ب	٢-٤	٨	٤	٤٨٠٠	٦٤٠٠
جـ	٢-٣	١٠	٤	١٦٠٠٠	١٩٠٠٠
د	٣-٤	٢	٢	٤٠٠٠	٤٠٠٠
هـ	٤-٥	٨	٤	٤٤٠٠	٧٠٠٠

جدول (١/١٠)

تقديرات الوقت والتكلفة للمشروع

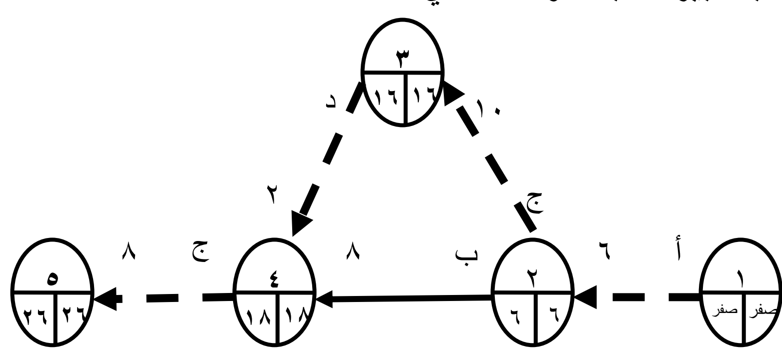
وترغب الإدارة في معرفة أقل تكلفة ممكنة لإتمام المشروع في أقل وقت ممكن.

لتوفير المعلومات اللازمة للإدارة تتبع الخطوات التالية:

أولاً: رسم شبكة بيرت:

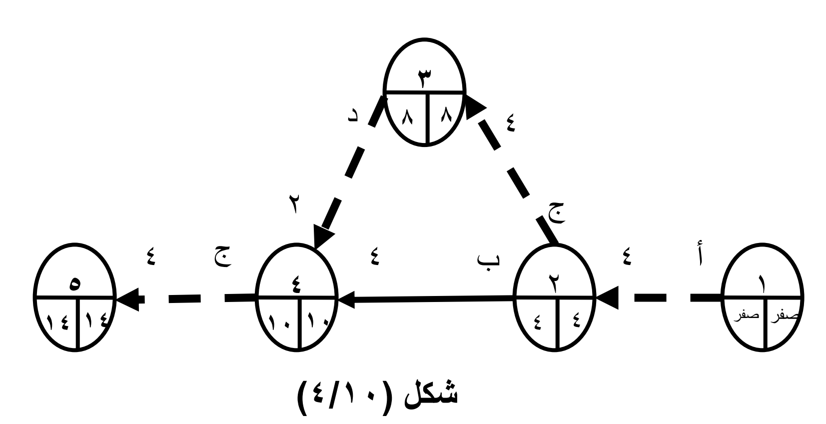
حتى يمكن تحديد الفترة التي يمكن تخفيض وقت المشروع بمقدارها يتم رسم شبكة بيرت طبقاً للوقت العادي وطبقاً للوقت المتسرع.

أ- شبكة بيرت طبقاً للوقت العادي:



شكل (٣/١٠) شبكة
بيرت طبقاً للوقت العادي

ب- شبكة بيرت طبقاً للوقت المتسرع:



شكل (٤/١٠)
شبكة بيرت طبقاً للوقت المتسرع

يتضح من شكل (٣/١٠) أن المسار الحرج طبقاً للوقت العادي هو أ جـ د هـ وطوله ٢٦ أسبوعاً.

كما يتضح من شكل (٤/١٠) أن المسار الحرج طبقاً للوقت المتسرع هو أ جـ د هـ وطوله ١٤ أسبوعاً.

وعلى ضوء ذلك فإنه يمكن تقصير زمن المشروع بمقدار ١٢ أسبوعاً وهو الفرق بين المسار الحرج طبقاً للوقت العادي والمسار الحرج طبقاً للوقت المتسرع.

ثانياً: حساب ميل التكلفة:

يوضح الجدول التالي ميل التكلفة لجميع الأنشطة:

النشاط	تغير التكلفة (متسرعة- عادية)	تغير الوقت (عادي- متسرع)	ميل التكلفة ٤ = ٢÷٣
(١)	(٢)	(٣)	(٤)
أ	١٠٠٠	٢	٥٠٠
ب	١٦٠٠	٤	٤٠٠
جـ	٣٠٠٠	٦	٥٠٠
د	صفر	صفر	صفر
هـ	٢٦٠٠	٤	٦٥٠

جدول (٢/١٠)

يوضح ميل التكلفة للأنشطة

ثالثاً: تقصير وقت المشروع:

لتقصير وقت المشروع يتبع الآتي:

١- تحديد النشاط صاحب أقل ميل تكلفة على المسار الحرج ويتضح أن النشاطين (أ، جـ) لهما أقل ميل تكلفة ضمن أنشطة المسار الحرج وحيث أن النشاط (أ) مشترك في المسارين فتكون له الأولوية حيث يترتب على تقصير وقته تخفيض وقت المسارين وبنفس التكلفة، إذن نبدأ بتخفيض وقت النشاط (أ).

٢- تحديد حدود فترة التخفيض للنشاط المراد تخفيض وقته، وبالنسبة للنشاط (أ) حدود فترة التخفيض له أسبوعين (الفرق بين الوقت العادي والوقت المتسرع).

٣- قد يترتب على تخفيض وقت أحد الأنشطة الحرجة تحول المسار الحرج أو ظهور مسار حرج أخر، ولعلاج ذلك يتم حساب الراكد الحر لجميع الأنشطة غير الحرجة ثم يتم تخفيض وقت النشاط المراد تخفيضه في حدود ما يسمح به وقت النشاط وأقل راكد حر عل الرسم أيهما أقل.

لذلك نحسب الراكد الحر للنشاط (ب) لأنه غير حرج

الراكد الحر= نهاية مبكرة - بداية مبكرة - طول النشاط

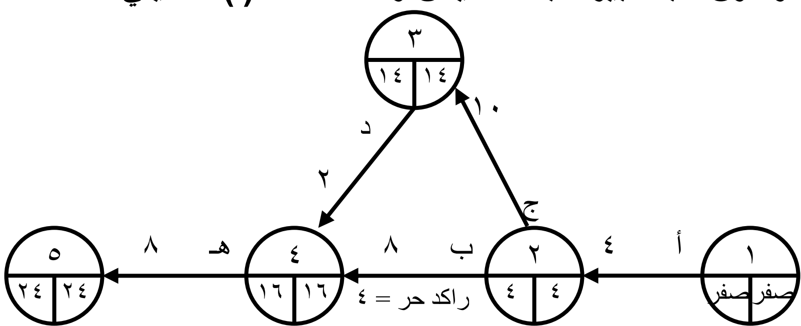
= ١٨- ٦ -٨ = ٤ أسابيع.

∴ يخفض وقت النشاط (أ) أسبوعين في حدود فترة التخفيض الخاصة به لأنها أقل من الراكد الحر.

وبذلك يصبح وقت المشروع ٢٦ – ٢ = ٢٤ أسبوع.

وتزيد تكلفة المشروع بمقدار ١٠٠٠ جنيه (٢ أسبوع × ٥٠٠ جنيه ميل التكلفة).

وتكون شبكة بيرت بعد تخفيض وقت النشاط (أ) كما يلي:



شكل (٥/١٠)

شبكة بيرت بعد تقصير (أ) أسبوعين

يتضح من الشكل السابق (٥/١٠) أن المسار الحرج لم يتغير ومازال أ جـ د هـ وطوله ٢٤ أسبوعاً.

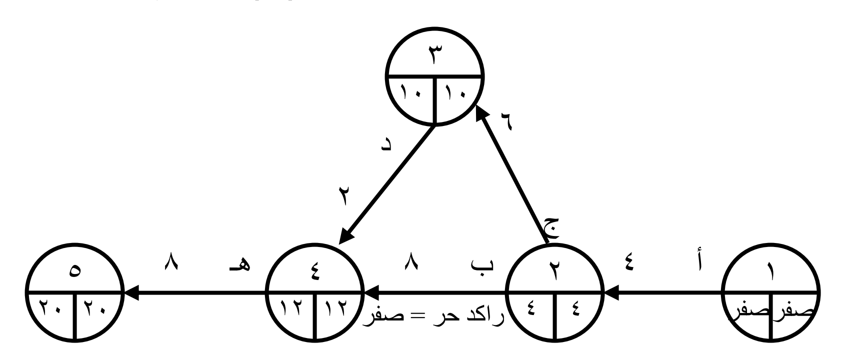
التخفيض الثاني:

- **النشاط (جـ) له أقل ميل تكلفة على المسار الحرج.**
- **حدود فترة التخفيض للنشاط (جـ) ٦ أسابيع.**

∴ يخفض وقت النشاط (جـ) بمقدار ٤ أسابيع فقط ويصبح طول وقت المشروع ٢٤- ٤= ٢٠ أسبوع.

ويترتب على تخفيض وقت النشاط (جـ) ٤ أسابيع زيادة تكلفة المشروع بمبلغ ٢٠٠٠ جنيه (٤ أسابيع× ٥٠٠ جنيه ميل التكلفة).

وتكون شبكة بيرت بعد تخفيض وقت النشاط (جـ) كما يلي:



شكل (٦/١٠)

شبكة بيرت بعد تقصير (جـ) ٤ أسابيع

التخفيض الثالث:

يتضح من الشكل السابق (٦/١٠) أنه أصبح هناك مساران حرجان طول كل منهما ٢٠ أسبوع وهما (أ جـ د هـ) ، (أ ب هـ).

وهنا يلزم تقصير وقت المسارين معاً وبنفس المدة ويتضح من الشكل (٦/١٠) أن هناك بديلان للتخفيض هما:

- **تخفيض وقت النشاط (ج) أسبوعين ووقت النشاط (ب) بأسبوعين حيث أن النشاط (ب) يسمح بأربعة أسابيع في حين أن النشاط (جـ) يسمح بأسبوعين فقط. وتكون تكلفة هذا البديل**

= (٢ أسبوع × ٥٠٠ ميل تكلفة (جـ) + ٢ أسبوع × ٤٠٠ ميل تكلفة (ب)) = ١٨٠٠ جنيه.

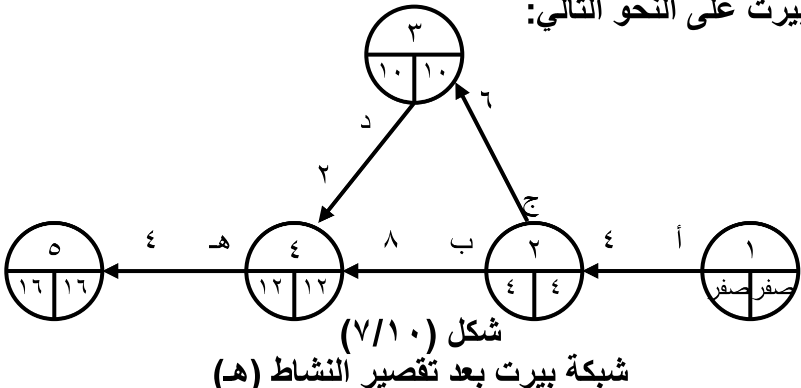
- **تخفيض وقت النشاط (هـ) بمقدار أسبوعين، فهو نشاط مشترك في المسارين الحرجين وتخفيض وقته يترتب عليه تخفيض وقت المسارين معهاً.**

وتكون تكلفة هذا البديل = ٢ أسبوع × ٦٥٠ ميل تكلفة (هـ)

= ١٣٠٠ جنيه.

يتضح من ذلك أن تكلفة البديل الثاني أقل، وبذلك يتم تخفيض وقت النشاط (هـ) وحيث أنه يسمح بأربعة أسابيع وأنه مشترك في المسارين ولا يوجد راكد حر لأي نشاط فيمكن تقصير وقته بأربعة أسابيع.

وبذلك يقل وقت المشروع من ٢٠ أسبوع إلى ١٦ أسبوع وتزيد تكلفة المشروع بمبلغ ٢٦٠٠ جنيه (٤ أسابيع × ٦٥٠ جنيه للأسبوع) وتكون شبكة بيرت على النحو التالي:



شكل (٧/١٠)

شبكة بيرت بعد تقصير النشاط (هـ)

التخفيض الرابع:

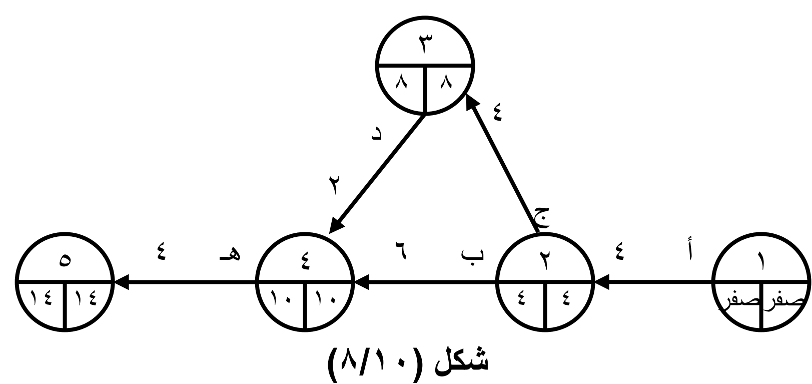
يتضح من الشكل السابق (٧/١٠) أنه مازال هناك مساران حرجان طول كل منهما ١٦ أسبوع وهما (أ جـ د هـ) ، (أ ب هـ)

لم تعد هناك أنشطة يمكن تخفيض وقتها سوى النشاط جـ، ب ولذلك يتم تخفيض وقت النشاط (جـ) على المسار الأول بمقدار أسبوعين (النشاط جـ يسمح بـ ٦ أسابيع وخفض قبل ذلك بأربعة أسابيع) وفي نفس الوقت يتم تخفيض وقت النشاط (ب) بمقدار أسبوعين فقط مع أنه يسمح بأربعة أسابيع.

وعلى ذلك يصبح وقت المشروع ١٤ أسبوعاً (١٦-٢).

وتزيد تكلفة المشروع بمبلغ ١٨٠٠ جنيه (٢ أسبوع × ٥٠٠ جنيه ميل تكلفة (جـ) + ٢ أسبوع× ٤٠٠ ميل تكلفة (ب))

وتكون شبكة بيرت على النحو التالي:



شكل (٨/١٠)

شبكة بيرت بعد تخفيض وقت النشاطين (جـ، ب)

يتضح من كل ما سبق ما يلي:

- **أقل وقت لإتمام المشروع هو ١٤ أسبوعاً.**
- **أقل تكلفة لإتمام المشروع في أقل وقت ممكن**

= مجموع التكلفة العادية لجميع الأنشطة+ تكلفة التخفيضات في الوقت

= ٣٢٨٠٠ ت عادية

٧٤٠٠ + تكلفة جميع التخفيضات (تكاليف إضافية)

٤٠٢٠٠ جنيه

يلاحظ على الطريقة السابقة التي اتبعت في تقصير وقت المشروع أننا مع كل تخفيض نعيد رسم شبكة بيرت من جديد ونحسب من جديد الراكد الحر للأنشطة غير الحرجة وهذا التكرار يترتب عليه كثرة العمليات الحسابية وتعددها، ولذلك يمكن استخدام طريقة أخرى تعطي نفس النتائج بل وتوفر للإدارة معلومات أكثر ولا نحتاج فيها إلى تكرار رسم شبكة بيرت ولا نحتاج لحساب الوقت الراكد الحر للأنشطة غير الحرجة.

وتتبلور هذه الطريقة في إعداد جدول يوضح مراحل التخفيض وطول المسارات المختلفة عند كل مرحلة والتكاليف الإضافية المترتبة على كل مرحلة، كما يتضح من الجدول التالي:

التعديلات والأنشطة / المسارات	١	٢	٣	٤	٥
	لا إسراع	أ	ب	جـ	ب، جـ
أ ب جـ هـ	٢٦	٢٤	٢٠	١٦	١٤
أ ب هـ	٢٢	٢٠	٢٠	١٦	١٤
تكاليف إضافية	-	١٠٠٠	٢٠٠٠	٢٦٠٠	١٨٠٠
تكاليف إضافية متجمعة	-	١٠٠٠	٣٠٠٠	٥٦٠٠	٧٤٠٠

جدول (٣/١٠)

يوضح مراحل التخفيض

ملاحظات على الجدول السابق (٣/١٠)

١- التعديل الأول: لا إسراع ومعنى ذلك عدم تحمل تكاليف إضافية وبقاء وقت المشروع كما هو دون تخفيض أي ٢٦ أسبوع

٢- التعديل الثاني: تخفيض وقت النشاط (أ) أسبوعين ويترتب على ذلك، انخفاض وقت المشروع بمقدار أسبوعين وتحمل تكاليف إضافية ١٠٠٠ ج ومازال المسار أ جـ د هـ هو المسار الحرج.

٣- التعديل الثالث: تخفيض وقت النشاط (جـ) بأربعة أسابيع ويترتب على ذلك تخفيض وقت المشروع بمقدار أربعة أسابيع وتحمل تكاليف إضافية ٢٠٠٠، وأصبح هناك مساران حرجان هما (ا جـ د هـ، أ ب هـ)

ويلاحظ أننا لم نخفض النشاط)(جـ) بستة أسابيع كما تسمح به حدود فترة التخفيض للنشاط (جـ) وذلك لأن المسار الأخر طوله ٢٠ أسبوع وإذا تم تخفيض (جـ) بـ ٦ أسابيع يتحول المسار الحرج ويتم تحمل تكلفة أسبوعين دون أن يقل وقت المشروع مقابل هذه التكلفة.

٤- التعديل الرابع: يخفض وقت النشاط (هـ) بمقدار ٤ أسابيع وحيث أنه مشترك في المسارين فيقل وقت المسارين معاً بنفس الفترة، وبذلك يقل وقت المشروع بمقدار ٤ أسابيع وتزيد تكاليف المشروع بمبلغ ٢٦٠٠ جنيه ومازال هناك مساران حرجان.

٥- التعديل الخامس: يخفض وقت النشاط (جـ) أسبوعين ويخفض وقت النشاط (ب) أسبوعين ويترتب على ذلك انخفاض وقت إتمام المشروع إلى ١٤ أسبوع وتحمل تكلفة إضافية ١٨٠٠ جنيه.

ويلاحظ أنه كان يمكن تقصير وقت النشاط (ب) بمقدار ٤ أسابيع ولكن المسار أ جـ د هـ لا يمكن تقصيره عن ١٤ أسابيع لذلك يخفض (ب) أسبوعين لأن أي تخفيض بعد ذلك للنشاط (ب) لا يترتب عليه تقصير وقت إتمام المشروع ويترتب عليه تحمل تكاليف إضافية دون مقابل أو دون مبرر.

٣/١٠- دور أسلوب بيرت/ تكلفة في إمداد الإدارة بالمعلومات:

قد ترغب الإدار في التعرف على إجابة عديد من الاستفسارات بما يرشد عملية اتخاذ القرارات الإدارية ومن أمثلة هذه الاستفسارات ما يلي:

- ما هي أقل تكلفة ممكنة لإتمام المشروع في أقل وقت ممكن؟
- ما هي أقل تكلفة لإتمام المشروع خلال وقت معين؟
- ما هي التكلفة الإضافية اللازمة لتخفيض وقت المشروع بمدة معينة؟
- ما هو الوقت اللازم لإتمام المشروع في حدود موازنة مالية معينة؟
- أيهما أفضل للإدارة، الإسراع في إتمام المشروع وتجنب دفع غرامة تأخير، أم إتمام المشروع في وقته العادي وتحمل غرامات تأخير؟

يمكن توضيح أهمية أسلوب بيرت/ تكلفة في توفير مثل هذه المعلومات للإدارة من خلال متابعة المثال التالي:

مثال عام:

أمكن تجميع البيانات والمعلومات التالية عن مشروع عملية صيانة لأحد المصانع الكبرى:

النشاط	الأحداث	الوقت بالأسبوع		التكلف بالجنيه	
		عادي	متسرع	عادية	متسرعة
أ	١-٢	٢	٥	١٥٠٠	٢٠٠٠
ب	١-٣	١٥	١٥	٧٠٠٠	٧٠٠٠
جـ	٢-٣	٣	٢	٢٠٠٠	٣٠٠٠
د	٣-٤	٦	٣	٤٠٠٠	٤٦٠٠
هـ	٢-٥	٢٠	١٥	٢٠٠٠	٤٥٠٠
و	٤-٥	٨	٥	٢٠٠٠	٣٥٠٠
ز	٤-٦	٤	٣	٤٠٠٠	٥٠٠٠
ل	٥-٦	٨	٣	٦٠٠٠	١٣٥٠٠
				٢٨٥٠٠	٤٣١٠٠

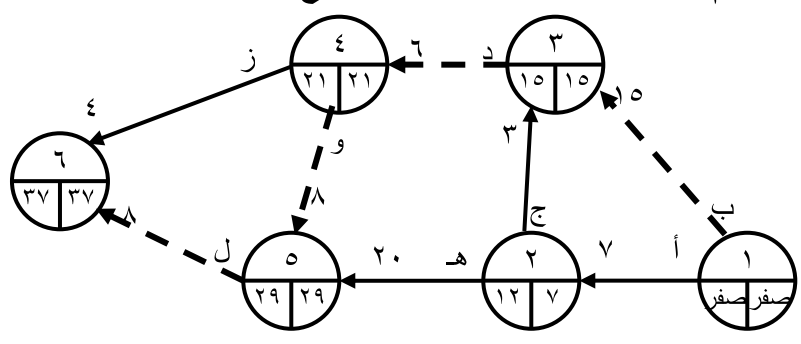
جدول (٤/١٠)

يوضح بيانات الوقت والتكلفة للمشروع

المطلوب:

١- رسم شبكة بيرت طبقاً للوقت العادي موضحاً عليه المسار الحرج.
٢- حساب الوقت المبكر والمتأخر والراكد الكلي والراكد الحر لكل نشاط.
٣- حساب أقل تكلفة لإتمام المشروع في أقل وقت ممكن.
٤- حساب التكلفة الإضافية اللازمة لإتمام المشروع خلال ٣٢ أسبوع.
٥- حساب وقت إتمام المشروع بموازنة مالية إجمالية قدرها ٣٧١٠٠ جنيه.
٦- بفرض أن هذا المصنع يحقق ربحاً أسبوعياً قدره ٧٠٠ جنيه فما هو الوقت الأمثل لإتمام مشروع الصيانة؟

أولاً: رسم شبكة بيرت وتحديد المسار الحرج:



شكل (٩/١٠)

شبكة بيرت طبقاً للوقت العادي

لتحديد المسار الحرج يتم حصر جميع المسارات على الرسم وأطولها يكون هو المسار الحرج كما يلي:

المسار	الوقت اللازم لأنشطة المسار	طول المسار
ب د ز	١٥+ ٦+ ٤	٢٥ أسبوع
ب د و ل	١٥+ ٦+ ٨+ ٨	٣٧ أسبوع
أ جـ د ز	٧+ ٣+ ٦+ ٤	٢٠ أسبوع
أ جـ د و ل	٧+ ٣+ ٦+ ٨+ ٨	٣٢ أسبوع
أ هـ ل	٧+ ٢٠+ ٨	٣٥ أسبوع

جدول (٥/١٠)

يوضح المسارات على الرسم السابق

∴ المسار الحرج طبقاً للوقت العادي هو ب د و ل وطوله ٣٧ أسبوع.

أي أن أطول وقت لإتمام المشروع هو٣٧ أسبوع بتكلفة ٢٨٥٠٠جنيه (مجموع التكلفة العادية لجميع الأنشطة).

ثانياً: حساب الوقت المبكر والتأخر والراكد:

بالرجوع إلى قواعد حساب الوقت المبكر والمتأخر والراكد للأحداث وللأنشطة كما سبق ذكرها في الفصل السابق أمكن حساب الوقت المبكر والمتأخر والراكد للأنشطة في مثالنا الحالي كما يوضحها الجدول التالي:

النشاط (١)	وقت النشاط (٢)	الوقت المبكر		الوقت المتأخر		الراكد الكلي (٧)	الراكد الحر (٨)
		بداية(٣)	نهاية(٤)	بداية(٥)	نهاية(٦)		
أ	٧	صفر	٧	٥	١٢	٥	صفر
ب	١٥	صفر	١٥	صفر	١٥	صفر	صفر
جـ	٣	٧	١٠	١٢	١٥	٥	٥
د	٦	١٥	٢١	١٥	٢١	صفر	ضفر
هـ	٢٠	٧	٢٧	٩	٢٩	٢	٢
و	٨	٢١	٢٩	٢١	٢٩	صفر	صفر
ز	٤	٢١	٢٥	٣٣	٣٧	١٢	١٢
ل	٨	٢٩	٣٧	٢٩	٣٧	صفر	صفر

جدول (٦/١٠)

يوضح الوقت المبكر والمتأخر والراكد لأنشطة

ملاحظات على الجدول السابق (٦/١٠):

- العمود (٧)= (٥-٣) أو (٦-٤).
- العمود ٨ حسب من على الرسم (٩/٥) بتطبيق العلاقة التالية:

الراكد الحر= وقت النهاية المبكر- وقت البداية المبكر – طول النشاط.

- الأنشطة ب، د، و، ل ليس لها وقت راكد لأنها أنشطة حرجة.
- الأنشطة أ، جـ، هـ، ز لها وقت راكد كلي لأنها أنشطة غير حرجة.

ثالثاً: حساب ميل التكلفة:

يوضح الجدول التالي ميل التكلفة لجميع الأنشطة.

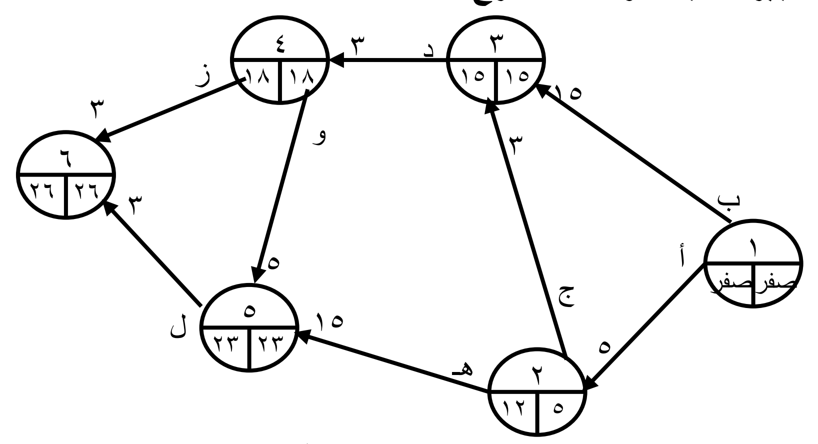
النشاط	تغير التكلفة (متسرعة- عادية)	تغير الوقت (عادي- متسرع)	ميل التكلفة ٤= ٢÷٣
(١)	(٢)	(٣)	
أ	٥٠٠	٢	٢٥٠
ب	صفر	صفر	صفر
جـ	١٠٠٠	١	١٠٠٠
د	٦٠٠	٣	٢٠٠
هـ	٢٥٠٠	٥	٥٠٠
و	١٥٠٠	٣	٥٠٠
ز	١٠٠٠	١	١٠٠٠
ل	٧٥٠٠	٥	١٥٠٠

جدول (٧/١٠) ميل التكلفة للأنشطة.

رابعاً: حساب أقل تكلفة لإتمام المشروع في أقل وقت ممكن:

أ- لتحديد أقل وقت ممكن لإتمام المشروع يلزم تحديد المسار الحرج طبقاً للوقت المتسرع، لذلك نرسم شبكة بيرت طبقاً للوقت المتسرع على النحو التالي:

شبكة بيرت طبقاً للوقت المتسرع:



شكل (١٠/١٠) شبكة بيرت طبقاً للوقت المتسرع

يتضح من الشكل السابق (١٠/١٠) أن أطول مسار طبقاً للوقت المتسرع هو المسار ب د و ل وطوله ٢٦ أسبوع.

∴ أقل وقت ممكن لإتمام المشروع هو ٢٦ أسبوع.

ب- حساب أقل تكلفة لإتمام المشروع في أقل وقت:

يتم تحديد التعديلات التي تجرى وحساب التكاليف الإضافية كما يوضحها الجدول التالي:

التعديلات والأنشطة / المسارات	صفر	١	١٢	٣	٤	٥
	لا إسراع	د	أ، د	أ، و	و، هـ	ل
ب د ز	٢٥	٢٣	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢
ب د و ل	٣٧	٣٥	٣٤	٣٣	٣١	٢٦
أ جـ د ز	٢٠	١٨	١٦	١٥	١٥	١٥
أ جـ د و ل	٣٢	٣٠	٢٨	٢٦	٢٤	١٩
أ هـ ل	٣٥	٣٥	٣٤	٣٣	٣١	٢٦
تكاليف إضافية	-	٤٠٠	٤٥٠	٧٥٠	٢٠٠٠	٧٥٠٠
تكاليف إضافية متجمعة	-	٤٠٠	٨٥٠	١٦٠٠	٢٦٠٠	١١١٠٠

جدول (٨/١٠)

يوضح التعديلات في أوقات الأنشطة.

ملاحظات على الجدول السابق (٨/١٠):

١- التعديل صفر. يعني عدم الإسراع في تنفيذ المشروع وبقاء الوضع على ما هو عليه وبالتالي يكون وقت المشروع ٣٧ أسبوع وعدم تحمل تكلفة إضافية.

٢- التعديل (١) النشاط (د) صاحب أقل ميل تكلفة على المسار الحرج ب د و ل ويمكن تخفيض وقته بمدة ٣ أسابيع ولكن المسار أ هـ ل طوله ٣٥ أسبوع، لذلك يخفض وقت النشاط (د) بمقدار أسبوعين فقط لأن تخفيضه بأكثر من أسبوعين يعني تقصير وقت المشروع عن ٣٥ أسبوع طول المسار الحرج الجديد أ هـ ل. ويترتب على تقصير النشاط (د) أسبوعين ما يلي:

- تقصير وقت المشروع من ٣٧ أسبوع إلى ٣٥ أسبوع.
- تحمل تكاليف إضافية قدرها ٢×٢٠٠= ٤٠٠ جنيه.
- أصبح هناك مساران حرجان هما أ هـ ل، ب د و ل وطول كل منهما ٣٥ أسبوع.

٣- التعديل رقم (٢) حيث يوجد أكثر من مسار حرج فإنه يلزم تخفيض كل المسارات الحرجة في وقت واحد وبنفس المدة ويوجد لدينا عدة بدائل هي:

الأول: تخفيض وقت النشاط (أ) على المسار أ هـ ل أسبوع بتكلفة قدرها ٢٥٠ جنيه مع تخفيض وقت النشاط (د) على المسار ب د و ل أسبوع بتكلفة قدرها ٢٠٠ جنيه وتكون تكلفة هذا البديل ٤٥٠ جنيه.

الثاني: تخفيض وقت النشاط (ل) بمقدار أسبوع بتكلفة ١٥٠٠ جنيه فهو نشاط مشترك في المسارين.

الثالث: تخفيض (أ) أسبوع بتكلفة ٢٥٠ جنيه مع تخفيض (و) أسبوع بتكلفة ٥٠٠ جنيه وتكون تكلفة هذا البديل ٧٥٠ جنيه.

الرابع: تخفيض (هـ) أسبوع بتكلفة ٥٠٠ جنيه وتخفيض (د) أسبوع بتكلفة ٢٠٠ وتكون تكلفة هذا البديل ٧٥٠ جنيه.

الخامس: تخفيض (هـ) أسبوع بتكلفة ٥٠٠ جنيه وتخفيض (و) أسبوع بتكلفة ٥٠٠ جنيه وتكون تكلفة هذا البديل ١٠٠٠ ج.

يلاحظ أن البديل الأول هو أقل هذه البدائل تكلفة.

يتم اختياره ويترتب على ذلك.

- تخفيض وقت المشروع من ٣٥ إلى ٣٤ أسبوع.
- تحمل تكلفة إضافية قدرها ٤٥٠ جنيه.
- مازال هناك مساران حرجان هما ب د و ل، أ هـ ل طول كل منهما ٣٤ أسبوع.

٤- تعديل رقم (٣): بالمفاضلة بين البدائل السابق ذكرها في التعديل الثالث نجد أن البديل الرابع لم يعد يصلح لأنه لم يعد يمكن تخفيض وقت النشاط (د). وعلى ذلك يكون البديل الثالث هو أفضل البدائل المتاحة.

∴ تخفيض وقت النشاط (أ) بأسبوع لأنه لم يعد يسمح بأكثر من أسبوع، وتخفيض وقت النشاط (و) أسبوع مع أنه يسمح بثلاثة أسابيع.

ويترتب على ذلك:

- **انخفاض وقت إتمام المشروع من ٣٤ إلى ٣٣ أسبوع.**
- **تحمل تكلفة إضافية قدرها ٢٥٠ + ٥٠٠ = ٧٥٠ جنيه.**
- **مازال هناك مساران حرجان هما ب د و ل، أ هـ ل.**

٥- التعديل رقم (٥): بالمقارنة بين البديلين المتبقيين من البدائل السابق ذكرها وهما البديل الثاني والبديل الخامس نجد أن البديل الخامس أقل تكلفة ويتم اختياره.

∴ يخفض وقت النشاط (و) أسبوعين لأنه يسمح بذلك وفي نفس الوقت يخفض وقت النشاط (هـ) بأسبوعين مع أنه يسمح بـ ٥ أسابيع ويترتب على ذلك:

- **انخفاض وقت المشروع من ٣٣ إلى ٣١ أسبوع.**
- **تحمل تكاليف إضافية قدرها ٢ × ٥٠٠ + ٢ × ٥٠٠ = ٢٠٠٠ ج**

٦- التعديل رقم (٦): بالنسبة للمسار ب د و ل لم تعد هناك أنشطة يمكن تخفيض وقتها سوى النشاط (ل) وهذا النشاط مشترك في المسارين، إذن هذا هو البديل الوحيد الممكن.

∴ يخفض وقت النشاط (ل) بمقدار ٥ أسابيع فهو يسمح بهذه المدة، كما أننا نحتاج ٥ أسابيع حتى نصل إلى أقل وقت ممكن لإتمام المشروع وهو ٢٦ أسبوع.

ويترتب على ذلك:

- **انخفاض وقت المشروع من ٣١ إلى ٢٦ أسبوع.**
- **تحمل تكلفة إضافية قدرها ٥ × ١٥٠٠ = ٧٥٠٠ جنيه.**

وعلى ضوء ما سبق يمكن استخلاص النتائج التالية:

١- أقل وقت ممكن لإتمام المشروع هو ٢٦ أسبوع.

٢- أقل تكلفة ممكنة لإتمام المشروع في أقل وقت ممكن

= مجموع التكلفة العادية لجميع الأنشطة

+ التكلفة الإضافية المتجمعة

= ٢٨٥٠٠ + ١١١٠٠ = ٣٩٦٠٠ جنيه

٣- بمقارنة جملة التكاليف المتسرعة لجميع الأنشطة ٤٣١٠٠ ج مع التكلفة السابق حسابها لإتمام المشروع في أقل وقت (٣٩٦٠٠ج) نجد أن التكلفة المتسرعة تزيد بمبلغ ٣٥٠٠ج وهذا يوضح مدى أهمية وفائدة أسلوب بيرت/ تكلفة حيث أنه باستخدام أسلوب بيرت/ تكلفة لم يخفض وقت جميع الأنشطة.

- النشاط (جـ) غير حرج ولم يخفض وقته وبذلك تم توفير ١٠٠٠ جنيه.
- النشاط (ز) غير حرج ولم يخفض وقته وبذلك تم توفير ١٠٠٠ جنيه.
- النشاط (هـ)غير حرج ولم يخفض المدة الباقية المسموح بها وقدرها ٣ أسابيع وبذلك أمكن توفير ٣ × ٥٠٠ = ١٥٠٠ جنيه.

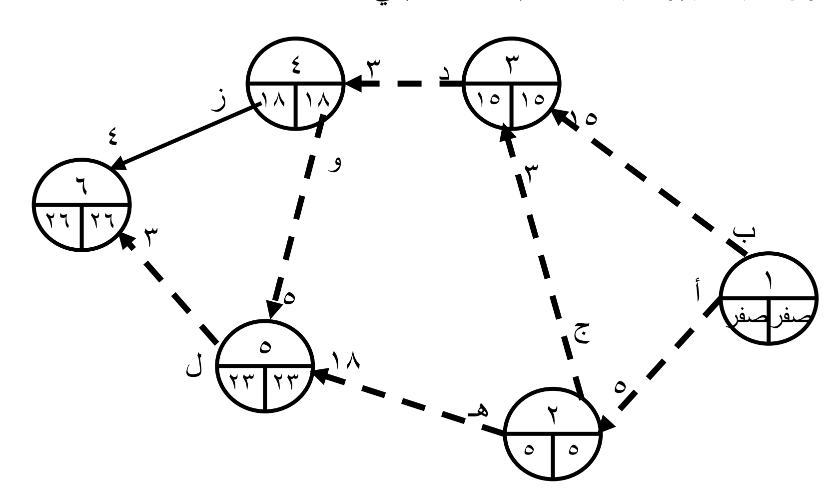
فيكون المجموع = ١٠٠٠ + ١٠٠٠ + ١٥٠٠ = ٣٥٠٠ ج.

هذا ويمكن توضيح وقت وتكلفة كل نشاط قبل وبعد التعديلات على النحو التالي:

النشاط	قبل التعديلات		بعد التعديلات	
	الوقت	التكلفة	الوقت	التكلفة
أ	٧	١٥٠٠	٥	٢٠٠٠
ب	١٥	٧٠٠٠	١٥	٧٠٠٠
جـ	٣	٢٠٠٠	٣	٢٠٠٠
د	٦	٤٠٠٠	٣	٤٦٠٠
هـ	٢٠	٢٠٠٠	١٨	٣٠٠٠
و	٨	٢٠٠٠	٥	٣٥٠٠
ز	٤	٤٠٠٠	٤	٤٠٠٠
ل	٨	٦٠٠٠	٣	١٣٥٠٠
		٢٨٥٠٠		٣٩٦٠٠

جدول (٩/١٠) يوضح وقت وتكلفة الأنشطة قبل وبعد التعديلات

وتكون شبكة بيرت بعد التعديلات كما يلي:



شكل (١١/١٠) شبكة بيرت بعد التعديلات

خامساً: حساب التكاليف الإضافية اللازمة لإتمام المشروع في ٣٢ أسبوع:

بالرجوع إلى جدول التعديلات السابق (٨/١٠) نجد أن مدة ٣٢ أسبوع تنحصر بين التعديل رقم (٣) والتعديل رقم (٤) وعلى ذلك فإنه عند التعديل رقم (٤) يمكن الاكتفاء بتخفيض أسبوع واحد (بدل أسبوعين) من وقت كل من النشاطين (و، هـ) وتكون التكلفة الإضافية في هذه الحالة ٥٠٠ + ٥٠٠ = ١٠٠٠ جنيه وبذلك تكون التكلفة الإضافية المتجمعة ٢٦٠٠ جنيه والوقت ٣٢ أسبوع.

∴ أقل تكلفة إضافية لإتمام المشروع خلال ٣٢ أسبوع هي ٢٦٠٠ جنيه وأقل تكلفة كلية = ٢٨٥٠٠ + ٢٦٠٠ = ٣١١٠٠ ج.

سادساً: وقت إتمام المشروع بموازنة إجمالية ٣٧١٠٠ جنيه:

حيث أن الموازنة المتاحة ٣٧١٠٠ جنيه والتكلفة العادية للمشروع ٢٨٥٠٠ فتكون التكلفة الإضافية المتاحة ٨٦٠٠ جنيه (٣٧١٠٠- ٢٨٥٠٠).

بالبحث في جدول التعديلات السابق (٨/١٠) نجد أنه حتى التعديل رقم (٤) يتم تحمل تكاليف إضافية ٣٦٠٠ جنيه ويكون المتبقي من التكاليف الإضافية المتاحة ٥٠٠٠ جنيه (٨٦٠٠- ٣٦٠٠) وحيث أن ميل التكلفة للنشاط (ل) (الذي يتم تخفيض وقته في التعديل رقم (٥)) هو ١٥٠٠ جنيه،

فإن المبلغ المتبقي من التكلفة الإضافية يكفي لتخفيض وقت النشاط (ل) ٣ أسابيع بمبلغ ٤٥٠٠ جنيه (٣× ١٥٠٠) ويتبقى من الموازنة ٥٠٠ جنيه، بذلك يصبح وقت إتمام المشروع ٢٨ أسبوع وليس ٢٦ أسبوع.

إذن وقت إتمام المشروع بموازنة إجمالية ٣٧١٠ جنيه هو ٢٨ أسبوع.

سابعاً: تحديد الوقت الأمثل لإتمام عملية الصيانة:

حيث أن كل أسبوع يتم تخفيضه من وقت مشروع عملية صيانة الآلات يترتب عليه تحقيق صافي أرباح قدره ٧٠٠ جنيه، وفي نفس الوقت يترتب عليه تحمل تكاليف إضافية، فإن الوقت الأمثل لإتمام عملية الصيانة يتحدد بمقارنة صافي الأرباح مع التكاليف الإضافية على النحو التالي:

- التعديل رقم (١) يخفض وقت المشروع أسبوعين مقابل زيادة في التكاليف قدرها ٤٠٠ جنيه أي ٢٠٠ جنيه للأسبوع، معنى ذلك أن الربح الذي يحققه المصنع خلال هذين الأسبوعين (١٤٠٠ جنيه) يبرر زيادة التكلفة.
- كذلك التعديل رقم (٢) يترتب عليه تخفيض وقت المشروع أسبوع مقابل زيادة في التكاليف قدرها ٤٥٠ جنيه، وبذلك مازال هناك مبرر لزيادة التكاليف فالربح الأسبوعي ٧٠٠ جنيه.
- أما التعديل رقم (٣) يخفض وقت المشروع واحد مقابل زيادة في التكلفة قدرها ٧٥٠ جنيه، وهنا نجد أن أرباح المصنع خلال الأسبوع لا تبرر هذه الزيادة في التكلفة وعلى ذلك يكتفي بالتعديلين رقم (١)، (٢) ويكون الوقت الأمثل لإتمام مشروع الصيانة هو ٣٤ أسبوع.

هذا وقد يكون القرار الذي يواجه الإدارة هو المفاضلة بين إتمام المشروع في وقته العادي الذي قد يزيد عن الوقت المتعاقد عليه وبالتالي تحمل غرامات وجزاءات تأخير، وبين الإسراع في إتمام المشروع ليتم في وقت التعاقد مع تحمل تكاليف إضافية. لترشيد الإدارة تتم المقارنة بين التكاليف إضافية نتيجة الإسراع في التنفيذ وبين غرامات التأخير التي يمكن توفيرها. (يتبع ما سبق ذكره في النقطة السابقة مباشرة (سابعاً)).

الفصل الحادي عشر
نظرية المباراة

١١ /١: مقدمة:

تواجه الإدارة في أغلب منظمات الأعمال بمشكلة اتخاذ القرار في ظروف التنافس والصراع والتعارض في المصالح بين أطراف عديدة ، ولا يتوقف ناتج القرار في مثل هذه الظروف علي ناتج القرار فقط ، بل يتوقف علي قرارات الأطراف المتنافسون ، ولذلك يستوجب الأمر أن تتنبأ الإدارة بالإستراتيجيات المحتمل أن يختارها هؤلاء الأطراف المتنافسون حتى يمكنها أن تختار أمثلها لتحقق أهدافها المرجوة.وتعتمد الإدارة في تنبؤاتها بسلوك واستراتيجيات المتنافسون علي خبرتها وممارستها لوظائفها في هذا الإطار، ولذا يجب عليها أن تعظم منفعتها بعد أخذ استراتيجيات المتنافسون في اعتبارها.وعادة ما يتعذر ويصعب علي الإدارة التنبؤ باستراتيجيات المتنافسون ، نظراً لأن كل منهم يسعى إلي تعظيم منفعته علي حساب الأخر، ولذلك يلجأ الأطراف المتنافسون إلي التخمين والتوقع باستراتيجيات خصومه.

وتنطوي أغلب حالات اتخاذ القرار علي قدر من التنافس والتباري والصراع والتعارض في المصالح بين أثنين أو أكثر من متخذي القرار، والذي يحاول كل منهما فيها أن يحسم الصراع والمنافسة ويحرز السبق وينهى ويكسب المباراة ويحقق النتيجة والعائد لصالحه ، ويوجد في مشكلة المباراة اثنين أو أكثر من المتبارين أو الخصوم يفترض فيهم أنهم علي أعلي درجة من الذكاء وكل منهم يحاول أن يعظم عائد قراره علي حساب خصومه ومنافسيه ،ويتوقف اتخاذ القرار علي العديد من العوامل يمكن تبويبها في مجموعتين أولها مجموعة العوامل التي تخضع لتحكم وسيطرة ورقابة الإدارة، ومن هذه العوامل تحديد مستويات الإنتاج، وحجم ونسب استغلال الطاقة الإنتاجية، واختيار منافذ التوزيع المناسبة، وكفاءة ومهارة العمالة، ومستوى جودة الآلات والمنتجات. أما المجموعة الثانية فتعرف بالعوامل التي لا تخضع لتحكم وسيطرة الإدارة، وتتمثل هذه العوامل في السياسات

والقرارات والتشريعات التي تصدرها الحكومة، أو القرارات والاستراتيجيات التي يختارها المنافسون.

ويستخدم الأطراف المشتركون في المباراة (اللاعبون أو الخصوم) قواعد المنطق والرياضيات لتطوير وإعداد استراتيجيات لكسب المباراة علي حساب منافسه أو منافسيه(خصومه). وتعد عملية تحديد الاستراتيجيات المثلي لحالات اتخاذ القرارات التنافسية لب وجوهر وموضوع نظرية المباراة. وتختلف نظرية المباراة بقدر ما عن معظم نماذج اتخاذ القرار التي عرضت في هذا المؤلف في أن هذه الأساليب تعالج اتخاذ القرارات الفردية التي لا توجد بين أطراف متنافسون ، بينما أن نظرية المباراة تعالج المشاكل التي تنطوي علي وتتضمن اثنين أو أكثر من متخذي القرار ، ولهذا يمكن القول بأن نظرية المباراة تعد أداة مفيدة عند اتخاذ القرارات في الحالات التي تتسم بتعارض المصالح بين المتنافسين ، والتي يتوقف اختيار أحد هذه الحالات على المواقف أو الاستراتيجيات التي يحتمل أن يختارها المتنافسون الآخرون الذين يخضعون لنفس ظروف اتخاذ القرار. وعادة ما يستخدم مصطلح المباراة للتعبير والتدليل علي الحالات أو المواقف أو الظروف التي تتسم بتعارض المصالح بين اللاعبين (الخصوم) خلال فترة من الزمن.

لقد توصل وطور كل من Neumann و Morgenstern نموذج نظرية المباراة في كتابهما الشهير نظرية المباراة والسلوك الاقتصادي سنة ١٩٤٤ ومنذ هذه اللحظة انتشرت وشاعت الاستخدامات والتطبيقات العملية لنظرية المباراة ، والتي لم يعد لها حدود. وقد استخدمت نظرية المباراة في تخطيط العمليات العسكرية وعمليات التفاوض والمساومة ، وتخطيط عمليات التأمين علي الحياة، كما كان لنظرية المباراة دوراً بارزاً عند صياغة وتطوير طريقة السمبلكس لحل نموذج البرمجة الخطية ، كما كان لها دوراً بارزاً في تأثيرها على مجال نظرية القرار .

٢/١١- شروط استخدام نظرية المباراة:

يشترط لاستخدام نظرية المباراة في اتخاذ القرار ضرورة توافر الشروط التالية:

١- ضرورة توافر اثنان أو أكثر من المتنافسين(اللاعبين أو الخصوم)، وعادة ما يطلق علي الخصم أو المتنافس مصطلح "لاعب" .

٢- أن يكون لكل متنافس عدد من الاستراتيجيات التي يمكنه الاختيار من بينها، ولا يلزم أن تكون هذه الإستراتيجيات مماثلة ومطابقة ومتوافقة مع اللاعب الأخر.

٣- يفترض أن كل متنافس علي علم ومعرفة ودراية وإدراك بالتحركات المرتقبة المتاحة لباقي المتنافسين مقدماً ومسبقاً، إلا أنه ليس متأكد بالإستراتيجية التي سيختارها المتنافس إلا بعد أن يختارها، وعندما يختار هذا المتنافس أحد هذه الإستراتيجيات فإنه بذلك يكون قد أدى أو لعب المباراة.

٤- تتوقف نتيجة المباراة (عائد أو مكاسب المباراة) التي يحققها أحد المتنافسين علي الإستراتيجيات التي يختارها باقي المتنافسين ، كما توقف علي الإستراتيجيات التي يختارها هذا المتنافس.

٥- تؤدى كل مجموعة من الإستراتيجيات التي يختارها المتنافسون (بواقع إستراتيجية لكل واحد منهم) إلي تحقيق نتيجة أو حصيلة معروفة ومحددة تسمي حصيلة المباراة.

٦- إمكانية تقدير جميع النتائج (العوائد) المحتملة لكل إستراتيجية ، وتعبر قيمة المباراة عن متوسط العائد الذي يمكن أن يحققه أحد الخصوم(المتنافسون)إذا اختار المتنافسون الآخرون أفضل إستراتيجيتهم).

٧- تمثل الإستراتيجية التي يختارها أحد المتنافسون قاعدة القرار التي يستخدمها المتنافس عند إقراره للإجراء الذي يتخذه ، ويوجد نوعين من الإستراتيجيات أولهما يعرف بالإستراتيجية المطلقة ، وهي التي تنطوي على تحرك واحد محدد ، أما النوع الثاني فيعرف بالإستراتيجية المختلطة وتعني تلك التي تتضمن عدة تحركات يستخدم كل منها لفترة من الزمن.

١١/ ٣: أنواع المشاكل التي تعالجها نظرية المباراة:

يمكن تبويب المشاكل التي تعالجها نظرية المباراة وفقاً لوجهات نظر عديدة ، فمن وجهة نظر عدد متخذي القرار المتنافسين أو عدد اللاعبين التي تنطوي عليهم المباراة، فإن المباراة (المشكلة أو حالة القرار)التي تنطوي وتشتمل عليها اثنان من اللاعبين فتعرف ويشار إليها بالمباراة الثنائية ، أما المباراة التي تشتمل علي عدد من اللاعبين قدره (ن) من اللاعبين حيث (ن) ≤ ٢ فتعرف المباراة المتعددة الأطراف أو ذات (ن) من الأطراف. وتجدر الإشارة إلي أن المشاكل التي تعالجها نظرية المباراة والتي تتضمن ثلاثة أو أكثر من اللاعبين عادة ما تكون في غاية من الصعوبة من الناحية النظرية والحسابية، وستقتصر معالجتنا علي مشاكل المباريات الثنائية التي تتضمن وتنطوي علي خصمين أو متنافسين فقط في هذا الفصل.

كما يمكن تبويب المباريات وفقاً للعائد الكلي من المباراة والذي يكون متاح للاعبين، والمباراة التي يكون مجموع مكاسب وخسائر اللاعبين مساوياً للصفر فيشار إليها بالمباراة الثنائية الصفرية أو المباراة ذات القيمة الصفرية. كما تعرف المباراة التي يكون فيها عائد أو مكسب اللاعب الأول مساوياً تماماً لخسائر اللاعب الثاني بالمباراة الثنائية الصفرية، وهذا النوع من المباريات سيكون موضع النقاشات التالية ، كما يوجد نوع آخر من المباريات التي يختلف فيها مجموع (إجمالي) مكاسب (أو خسائر اللاعبين عن الصفر، ويعرف هذا النوع من المباريات بالمباراة غير الصفرية وهذا النوع من المباريات من الصعب تحليله نظرياً وحسابياً ولن نناقشه في طيات هذا الفصل.

أما وجهة النظر الثالثة لتبويب مشاكل المباريات فتبوب المباريات وفقاً لنوعية الإستراتيجيات التي يستخدمها اللاعبون في المباراة، ففي بعض المباريات فإن الإستراتيجيات التي يتبعها كل لاعب ستكون هي نفس الإستراتيجية بصرف النظر عن الاستراتيجية التي يتبعها اللاعب الآخر أي اختيار الإستراتيجية لا يتأثر ولا يتوقف علي اختيار الخصم ى المثلى، ويشار إلي هذا النوع من النتائج بالاستراتيجيات المطلقة فقط عندما تحل المباراة وتعبر عن حالة التساوي أو التعادل أو نقطة التلاقي . أما المباريات التي ليس

لها نقطة تلاقي فإن اللاعبين سيلعبون في كل إستراتيجية بنسبة معينة أو لفترة ما من الزمن ، ويعرف هذا النوع من المباريات بالإستراتيجية المختلطة: وسيناقش المؤلف كل من المباراة ذات الإستراتيجية المطلقة أو المباريات ذات الاستراتيجيات المختلطة في الأجزاء التالية من هذا الفصل.

٤/١١- المباريات الثنائية الصفرية ذات الاستراتيجيات المطلقة:

تنشأ وتتحقق وتتواجد هذه المباراة عندما يكون عدد أطرافها اثنان (متنافسان أو خصمان) ، ويكون مجموع العوائد(المكاسب) التي يحققها أحدهما مستوياً تماماً لمجموع الخسائر التي لحقت وتحققت للمتنافس الآخر، ويعني ذلك أن إجمالي المكاسب التي حققها وأحرزها الطرفين يساوى صفراً، ويعبر عن هذا النوع من المباريات في شكل مصفوفة نتائج (عوائد) المباراة. ونناقش نظرية المباراة خلال هذا الفصل حيث نقدم ونعرض مباراة ثنائية صفرية من خلال عرض مصفوفة عوائد المباراة التالية بين المتنافسين س، و ص والتي تظهر علي النحو التالي:

ص

$$س \quad \begin{bmatrix} ٨ & ٦ \\ ١٢ & -٥ \end{bmatrix}$$

وتفسر عناصر هذه المصفوفة من خلال الجدول رقم (١/١١)التالي :

جدول رقم (١/١١)

س		ص	
		ص١	ص٢
	س١	س يربح ٨ ص يخسر ٨	س يربح ٦ ص يخسر ٦
	س٢	س يربح ١٢ ص يخسر ١٢	س يخسر ٥ ص يربح ٥

ويوضح الجدول رقم (١/١١) السابق أعلاه أن المباراة تتضمن لاعبان (متنافسان)هما اللاعب س واللاعب ص ، وأن كل منهما أمامه بديلين (إستراتيجيتان)، وتشير القيم المذكورة والموضحة بكل من المصفوفة رقم (١/١١) والجدول رقم(١/١١) إلي النتائج (العوائد) المحتمل تحققها في حالة اختيار أحد المتنافسين لإحدى إستراتيجيتيه، وتوضح صفوف المصفوفة الإستراتيجيتين اللاتين يمكن أن يختارهما المتنافس س، كما توضح أعمدة المصفوفة الاستراتيجيين اللاتين يمكن أن يختارهما اللاعب ص، وتشير الأرقام الموجبة في المصفوفة إلي المكسب أو العائد الذي يحققه اللاعب س الذي يلعب في الصفوف، أما الأرقام السالبة المبينة بالمصفوفة فتشير إلي المكاسب أ العوائد التي يحققها اللاعب ص الذي يلعب في الأعمدة.

ويمكن تحليل إستراتيجيتي كل من اللاعبين س ، و ص علي النحو التالي:

١- يربح المتنافس س إذا اختار إستراتيجيته الأولي س١ ٨ بشرط أو إذا اختار أو لعب المتنافس ص إستراتيجيته الأولي ص١ ويربح اللاعب س ٦ إذا اختار اللاعب ص إستراتيجيته الثانية ص٢ ، ونظراً لأن المكسب مضمون ومؤكد للمتنافس س إذا اختار إستراتيجيته الأولي س١ فأنه من المؤكد أنه سيختار هذه الإستراتيجية ويفضلها علي إستراتيجيته الثانية س٢.

٢- إذا اختار المتنافس س إستراتيجيته الثانية س٢ فإنه يربح فقط ١٢ إذا اختار المتنافس ص إستراتيجيته الأولي ص١، ويخسر ٥ إذا اختار المتنافس ص إستراتيجيته الثانية ص٢ .

٣- ونظراً لأن المتنافس ص يدرك ويعلم تماماً بأن المتنافس س سيختار إستراتيجيته الأولي س١ دائماً ، لذلك فإن المتنافس ص سيحاول تدنية خسائره (الأرباح المحتمل أن يحصل عليها المتنافس س)، ولذلك سيختار إستراتيجيته الثانية ص٢ ، وفي هذه الحالة يربح المتنافس س ٦ فقط، ويخسر المتنافس ص ٦ وتكون قيمة المباراة بالنسبة للمتنافس س تساوي ٦ وبالنسبة للمتنافس ص تساوى٦ ، وعلي الرغم من أن المتنافس ص قد خسر

المباراة إلا أنه قد اختار إستراتيجيته المثلي ص٢ التي تدني خسائره، ولو أنه اختار إستراتيجيته الأولي ص١ فكان سيخسر ٨.

وهكذا يتضح أن المباراة السابقة تعد مباراة ثنائية صفرية نظراً لأن مجموع المكاسب التي يحققها س البالغة ٦ تعادل وتساوى تماماً الخسائر الخاصة بالمتنافس ص والبالغة ٦ أيضا.

١١ /١/٤: القواعد الواجب إتباعها لتحديد أفضل إستراتيجية بالنسبة لمنافسي المباراة الثنائية الصفرية:

أ- بالنسبة للمتنافس الذي يلعب في الصفوف:يختار أسوأ نتائجه والتي تتمثل في أكبر قيمة سالبة في كل صف أو صفر أو أصغر قيمة موجبة في الصف في حالة عدم وجود أي قيمة سالبة بالصف حيث تمثل القيم السالبة مكسب للمتنافس الذي يلعب في الأعمدة ، وكلما عظمت وكبرت القيمة السالبة فإن هذا يعنى زيادة مكسب المتنافس الذي يلعب في الأعمدة، وبالتالي زيادة خسائر المتنافس الذي يلعب في الصفوف ، وفي حالة عدم وجود قيم سالبة بالصف . وكانت كل قيم عناصره موجبة فإن أسوأ نتيجة بالنسبة للمتنافس الذي يلعب في الصفوف تكون أقل قيمة موجبة في هذه الحالة .

ب- بالنسبة للمتنافس الذي يلعب في الأعمدة:يختار أسوء نتائجه، والتي تتمثل في أكبر قيمة موجبة في كل عمود أو أصغر قيمة سالبة في العمود إذا كان العمود لا يحتوى علي أرقام سالبة فقط ، ويفسر ذلك بأن القيمة في العمود تمثل مكسباً(ربحاً)بالنسبة للمتنافس الذي يلعب في الصفوف، وفي نفس الوقت خسارة للمتنافس الذي يلعب في الأعمدة. أما إذا كان كل قيم عناصر العمود سالبة فقط فإن أقل رقم سالب يمثل أدني ربح يمكن أن يحققه المتنافس الذي يلعب في الأعمدة.

جـ- أن القيمة الأكبر في القيم التي تمثل أسوأ النتائج التي حصلت عليها في البند (ب) بتمثل أفضل إستراتيجية للمتنافس الذي يلعب في الصفوف .

د- أن القيمة الأصغر في القيم التي تمثل أسوأ النتائج التي حصلت عليها في البند (ب) تمثل أفضل إستراتيجية للمتنافس الذي يلعب في الأعمدة .

هـ- تمثل قيمة المباراة الرقم الذي يلتقي عنده صف أفضل إستراتيجية بالنسبة للمتنافس الذي يلعب في الصفوف مع عمود أفضل إستراتيجية للمتنافس الذي يلعب في الأعمدة .

مثال:

بفرض أن لدينا حالة يحاول فيها اللاعب س أن يشترى أو يستأجر محلاً من مالكه (اللاعب ص)، وبافتراض أن اللاعب س لديه إستراتيجيتين استثماريتين ، وكل منهما يرتبطان بمحاولة السيطرة والاستحواذ علي المتجر بالكامل أو علي جزء منه بالنسبة للاعب س وتقضي الإستراتيجية الأولي $س_١$ للاعب س باستثمار ٦ مليون جنيها بينما تقضي الإستراتيجية الثانية $س_٢$ الخاصة باستثمار ٣ مليون جنيها، بالإضافة إلي ذلك فإننا نفترض أن المالك (اللاعب) ص لديه إستراتيجيتين،وتقضي إستراتيجيته الأولي $ص_١$بإمكانية بيعه جزء من المتجر للاعب س، كما نفترض أن عوائد (نتائج) هذه المباراة تتجسد وتتمثل وتقاس بصافي القيمة الحالية للعائد الذي يتحقق من مزيج الإستراتيجيتين التي يختارهما اللاعبان س ،و ص.

ويفترض في هذه المباراة أيضاً أن كل لاعب ملم ومدرك وعلي علم ومعرفة دقيقة بالمكاسب والعوائد التي تنتج من كل توليفة من إستراتيجيات الاستثمار لكل من اللاعبين س ، و ص ، وأن كل عائد أو مكسب يمثل مقدار ثابت من النقود، كما يفترض أن هذا المقدار من النقود له نفس قيمة المنفعة لكل لاعب من اللاعبين، بالإضافة إلي ذلك يفترض أنه إذا اللاعب س حصل علي العائد أو المكسب فإن اللاعب ص يجب أن يفقد ويخسر قيمة هذا العائد أو المكسب. ولهذا فأننا نكون أمام مباراة ثنائية صفرية ، والتي فيها يكون مجموع النتائج الموجبة (المكاسب أو الأرباح)للاعب س ومجموع النتائج السالبة (الخسائر)مساوياً للصفر.

ويوضح الجدول التالي رقم (٢/١١) مصفوفة المكاسب للاعب س – عرفياً تبين العوائد بالنسبة لأحد اللاعبين فقط (اللاعب س في هذا المثال)- وكما ذكرنا من قبل فإن الرقم الموجب للاعب س يعنى أنه يكسب ، أما بالنسبة

للاعب ص فإنه يعني أن اللاعب ص يخسر والعكس صحيح فإن الرقم السالب يعنى أن اللاعب س يخسر واللاعب ص يكسب.

جدول رقم (٢/١١) مصفوفة المكاسب (نتائج وعوائد) اللاعب س

إستراتيجية اللاعب ص / إستراتيجية اللاعب س	ص١ بيع المتجر	ص٢ استئجار المتجر
س١ استثمار ٦ مليون جنيهاً	١٠ مليون جنيهاً	١٢ مليون جنيهاً
س٢ استثمار ٣ مليون جنيهاً	٥ مليون جنيهاً	(٢٠) مليون جنيهاً

وتنطوي مصفوفة نتائج المباراة علي مباراة ذات إستراتيجية مطلقة، وكنتيجة لذلك فإن الإستراتيجية التي يختارها كل لاعب من اللاعبين ستكون هي ذاتها بصرف النظر عن إستراتيجية اللاعب أو اللاعبين الآخرين، وسيكون لهذه المباراة نقطة تلاقي.

ويمكن تحديد الإستراتيجيات للاعبين س ، و ص وإيجاد نقطة التلاقي للمباراة علي النحو التالي:

١- سيختار اللاعب س دائما الإستراتيجية س١ ، ونظراً لأن أسوأ نتيجة في حالة اختيار الإستراتيجية الأولي س١ تساوي ١٠ مليون جنيها ، وأفضل نتيجة في حالة اختيار الإستراتيجية الثانية تساوي ٥مليون جنيهاً.

٢- نظراً لأن ص لديه إلمام ومعرفة تامة بنتائج المباراة، ولهذا سيختار دائماً الإستراتيجية الأولي له ص١، ويرجع ذلك لأن اختيار الإستراتيجية الأولي ص١ سيفقد وسيخسر ١٠ مليون جنيها ، بينما إذا اختار الإستراتيجية الثانية ص٢ فإنه سيخسر وسيفقد ١٢ مليون جنيهاً.

٣- سيتبع كل من اللاعبين إستراتيجية مطلقة، وهذه المباراة لها نقطة تلاقي، وتمثل القيمة الرقمية لنقطة التلاقي نتيجة أو عائد المباراة، وهي تساوي في هذه الحالة ١٠ مليون جنيهاً والتي تمثل نقطة تلاقي (تقتطع) الإستراتيجية المثلي (الأفضل) المطلقة للاعب س (علي سبيل المثال س١) و الإستراتيجية المثلي (الأفضل) المطلقة للاعب ص (علي سبيل المثال ص١) .

ويمكن تلخيص حل نقطة التلاقي لهذه المشكلة كما هو موضح بالجدول رقم (٣/١١) التالي:

وتعرف قيمة المباراة بالقيمة المتوسطة أو المتوقعة لنتيجة المباراة إذا لعبت المباراة عدد لانهائي من المرات فإن قيمة نقطة التلاقي تساوى ١٠مليون جنيه.

جدول رقم (٣/١١) حل نقطة التلاقي.

إستراتيجية اللاعب ص / إستراتيجية اللاعب س	ص١ بيع المتجر	ص٢ استئجار المتجر
الإستراتيجية المطلقة المثلي للاعب س ←	١٠ مليون جنيهاً	
س١ استثمار ٦ مليون جنيهاً		١٢ مليون جنيهاً
س٢ استثمار ٣ مليون جنيهاً	٥ مليون جنيهاً	(٢٠) مليون جنيهاً

الإستراتيجية المطلقة المثلي للاعب ص ⇧ نقطة التلاقي

٢/٤/١١: معياري تدنية أقصي خسارة وتعظيم أدني عائد:

يمكن تطبيق معياري تدنية أقصي خسارة وتعظيم أدني عائد علي المباراة السابقة ، والمبينة بالجدول رقم (٣/١١) السابق بافتراض أن اللاعب س متشائم ، ولهذا سيختار اللاعب س الإستراتيجية التي تعظم المكاسب من بين المكاسب الممكنة ، وعلي العكس من ذلك ، يفترض أن اللاعب ص متفائل ، ولهذا سيختار الإستراتيجية التي تدني الخسائر من بين أقصي الخسائر المحتملة او الممكنة. ويستخدم معيار تدنية أقصي خسارة . ولإيضاح وبيان ذلك استناداً إلي بيانات مثالنا السابق والذي يمكن منه التوصل إلي القيم المبينة بالجدول رقم (٤/١١) الذي يشتمل علي عمود إضافي يوضح ويظهر أدني قيمة في صف عوائد اللاعب س ، وصف إضافي آخر يبين أعلي قيمة في أعمدة خسائر اللاعب ص .

جدول رقم (٤/١١) مثال معياري تدنية أقصي خسارة ، وتعظيم أدني عائد

إستراتيجية اللاعب ص / إستراتيجية اللاعب س	ص$_1$ بيع المتجر	ص$_2$ استئجار المتجر	أدني قيمة في عوائد صفوف اللاعب س
س$_1$ استثمار ٦ مليون جنيهاً	١٠ مليون جنيهاً	١٢ مليون جنيهاً	١٠ مليون جنيهاً
س$_2$ استثمار ٣ مليون جنيهاً	٥ مليون جنيهاً	(٢٠) مليون جنيهاً	(٢٠) مليون جنيهاً
أقصي قيمة في خسائر أعمدة اللاعب ص	١٠ مليون جنيهاً	١٢ مليون جنيهاً	

يتضح من الجدول السابق رقم (٤/١١) أن اللاعب س يطبق إستراتيجية تعظيم أدني عائد بتحديده لأصغر عائد لكل إستراتيجية من إستراتيجيتيه(س$_1$ ، س$_2$)، ومن ثم فإن اللاعب س سيختار أكبر عائد من بين هذين القيمتين الأدنيتين ، ولهذا فإن أكبر عائد من بين القيمتين الأدنيتين يساوى ١٠ مليون جنيهاً ، ولهذا يجب عليه اختيار الإستراتيجية الأولي له س$_1$، وعلي العكس من ذلك يطبق اللاعب ص معيار تدنية أقصي خسارة بتحديده لأكبر خسارة في كل إستراتيجية من إستراتيجيتيه(ص$_1$، ص$_2$)، ومن ثم فإن اللاعب ص يجب أن يختار أدني خسارة من بين هذه القيم القصوى (العظمي) ، والقيمة الأدني من بين أقصي الخسائر تساوي ١٠ مليون جنيهاً، ولهذا سيختار الإستراتيجية الأولي له وهي ص$_1$.

ويبين تحليل الإستراتيجيات التي يختارها اللاعبان س ، و ص أننا يجب أن نحصل علي حل يحقق هدفي كل من اللاعبين (علي سبيل المثال تعظيم أدني عائد للاعب س وتدنية أقصي خسارة للاعب ص)، ونكرر مرةأخري أن كل لاعب من اللاعبين له إستراتيجية مطلقة والتي تتمثل في حل نقطة التلاقي، ومع ذلك يجب أن نركز علي وندرك ونعرف أن معيار تدنية أقصي خسارة أو تعظيم أدني عائد إلي الحل الأمثل لكل لاعب طالما أن كل لاعب رشيد ويلتزم بهذه الإستراتيجيات.

٣/٤/١١: نقطة التلاقي والإستراتيجية المطلقة:

يتضح من الأمثلة السابقة أنه يجب علي كل متنافس أن يختار إستراتيجية واحدة من الإستراتيجيات المتاحة له، ولذلك يعرف هذا النوع من المباريات

بالمباريات الثنائية الصفرية ذات إستراتيجيات المطلقة ، حيث يهدف كل لاعب إلي تعظيم عائد هو تحقيق أفضل نتيجة للمباراة، ولهذا تتمثل أفضل قيمة بالنسبة للاعب الذي يلعب في الأعمدة في أصغر قيمة في أى صف، كما تتمثل أفضل قيمة بالنسبة للاعب الذي يلعب في الصفوف أكبر قيمة في كل عمود، وبناء علي ذلك إذا وجدت مفردة أو قيمة تتوافر فيها هاتين السمتين أو الشرطين، بمعني إذا كانت هذه المفردة تمثل اصغر قيمة في صفها وأكبر قيمة في عمودها في آن واحد فإن هذه المفردة أو القيمة تعرف بنقطة التلاقي. وإذا وجدت نقطة تلاقي للمباراة فإن هذا يعني أن كل لاعب قد اختار ولعب أفضل إستراتيجياته، وتمثل نقطة التلاقي قيمة المباراة. ونورد فيما يلي بعض الأمثلة في شكل جداول توضح مصفوفات نتائج(عوائد) المباراة لكي نوضح نقطة التلاقي الخاصة بكل مصفوفة أن وجدت .

مثال:

يوضح الجدول رقم (١١/٥) التالي مصفوفة نتائج المباراة الخاصة باللاعبين س ، وص.

جدول رقم (١١/٥) مصفوفة المكاسب (نتائج وعوائد) اللاعب س

إستراتيجية اللاعب ص / إستراتيجية اللاعب س	$ص_1$	$ص_2$
$س_1$	٦	٩
$س_2$	١٥ -	٢١

والمطلوب : إيجاد نقطة التلاقي.

الحل

لإيجاد نقطة التلاقي نحسب الآتي:

أصغر مفردة في الصف الأول ٦ أكبر مفردة في العمود الأول

أصغر مفردة في الصف الثاني - ١٥ أكبر مفردة في العمود الثاني ٢١

وعلي ذلك يتمثل حل المباراة في اختيار الصف الأول للاعب س والعمود الأول للاعب ص ، وتكون قيمة المباراة أو نقطة التلاقي ٦.

مثال:

يوضح الجدول رقم (٦/١١) التالي مصفوفة نتائج المباراة الخاصة باللاعبين س ، وص

جدول رقم (٦/١١) مصفوفة المكاسب (نتائج وعوائد) اللاعب س

إستراتيجيات اللاعب ص / إستراتيجيات اللاعب س	ص١	ص٢	ص٣	ص٤
س١	٤٥	٠	١٥	٦
س٢	- ٢٤	-٢٧	-٢١	٩
س٣	٢١	-١٨	٣٠	٦٥

والمطلوب: إيجاد نقطة التلاقي أي قيمة المباراة .

أصغر مفردة في الصف الأول ٠ أكبر مفردة في العمود الأول ٤٥

أصغر مفردة في الصف الثاني - ٢٧ أكبر مفردة في العمود الثاني ٠

أصغر مفردة في الصف الثالث - ١٨ أكبر مفردة في العمود الثالث ٣٠

أكبر مفردة في العمود الرابع ٦٥

وعلي ذلك يتمثل حل المباراة في اختيار الصف الأول للاعب س والعمود الثاني للاعب ص ، وتكون قيمة المباراة أو نقطة التلاقي صفر.

مثال:

يوضح الجدول رقم (٧/١١) التالي مصفوفة نتائج المباراة الخاصة باللاعبين س ، وص

جدول رقم (٧/١١) مصفوفة المكاسب (نتائج وعوائد) اللاعب س

إستراتيجيات اللاعب ص / إستراتيجيات اللاعب س	ص١	ص٢
س١	٥٠	٠
س٢	٢٥	-٤٥
س٣	-٤٠	-٥٥

والمطلوب: إيجاد نقطة التلاقي أي قيمة المباراة.

أصغر مفردة في الصف الأول ٠ أكبر مفردة في العمود الأول ٥٠

أصغر مفردة في الصف الثاني - ٤٥ أكبر مفردة في العمود الثاني ٠

أصغر مفردة في الصف الثالث - ٥٥

وعلي ذلك يتمثل حل المباراة في اختيار الصف الأول للاعب س والعمود الثاني للاعب ص ، وتكون قيمة المباراة أو نقطة التلاقي مساوية للصفر.

مثال: يوضح الجدول رقم (٨/١١) التالي مصفوفة نتائج المباراة الخاصة باللاعبين س ، وص.

جدول رقم (٨/١١) مصفوفة المكاسب (نتائج وعوائد) اللاعب س

إستراتيجيات اللاعب ص / إستراتيجيات اللاعب س	ص$_1$	ص$_2$	ص$_3$	ص$_4$
س$_1$	٣	٨	١١	٣
س$_2$	٢	٦	٤	-٥
س$_3$	٢	-٧	٠	١
س$_4$	-١١	-٩	١٨	-٢

والمطلوب: إيجاد نقطة التلاقي أي قيمة المباراة .

أصغر مفردة في الصف الأول ٣ أكبر مفردة في العمود الأول ٣

أصغر مفردة في الصف الثاني - ٥ أكبر مفردة في العمود الثاني ٨

أصغر مفردة في الصف الثالث - ٧ أكبر مفردة في العمود الثالث ١٨

أصغر مفردة في الصف الرابع - ١١ أكبر مفردة في العمود الرابع ٣

يلاحظ أن هذه المباراة لها نقطتي تلاقي حيث أن أصغر قيمة في الصف الأول هي أكبر قيمة في العمود الأول، وتساوي ٣، كما أن أصغر قيمة في الصف الأول هي أيضا ٣ وأكبر قيمة في العمود الرابع تساوي ٣.

وعلي ذلك يتضح أنه يوجد أكثر من حل (يوجد حل بديل) لهذه المباراة حيث يختار المتنافس س الإستراتيجية الأولي له س$_1$ بينما أن المتنافس ص يمكن أن يختار إستراتيجيته الأولي أو إستراتيجيته الرابعة أو مزيج منهما، وتكون قيمة المباراة في هذه الحالة تساوي ٣.

مثال:

يوضح الجدول رقم (١١/٩) التالي مصفوفة نتائج المباراة الخاصة باللاعبين س ، وص

جدول رقم (١١/٩) مصفوفة المكاسب (نتائج وعوائد) اللاعب س

إستراتيجيات اللاعب ص / إستراتيجيات اللاعب س	ص١	ص٢
س١	٦	٨
س٢	١٨	٤

والمطلوب : إيجاد نقطة التلاقي أي قيمة المباراة .

أصغر مفردة في الصف الأول ٦ أكبر مفردة في العمود الأول ١٨

أصغر مفردة في الصف الثاني ٤ أكبر مفردة في العمود الثاني ٨

يلاحظ أن هذه المباراة ليس لها نقطة تلاقي نظراً لعدم وجود مفردة تمثل أصغر قيمة في صفها وأكبر قيمة في عمودها ، مما يعني أن هذه المباراة ليست مباراة ذات إستراتيجية مطلقة بل نحن أمام مباراة ذات إستراتيجية مختلطة وهو ما نناقشه في الجزء التالي

١١/٤/٤ :المباريات الثنائية الصفرية ذات الاستراتيجيات المختلطة وطرق حلها:

إذا لم يوجد للمباراة نقطة تلاقي فيعني هذا أننا أمام مباراة ذات إستراتيجية مختلطة وليست مطلقة، ويستوجب هذا علي كل لاعب من اللاعبين أن يلعب (يختار) في كل إستراتيجية من الإستراتيجيات لفترة محددة من الوقت، ويشار إلي هذا النوع من المباريات بالمباريات ذات الإستراتيجيات المختلطة. ولبيان المباريات الثنائية الصفرية ذات الإستراتيجيات المختلطة المثال التالي:

مثال

تتنافس الشركتان س ، وص في قطاع صناعي معين، وترغبان في اتخاذ قرار استثماري لتحقيق ميزة تكنولوجية تنافسية، وأمام هاتين الشركتين أن

تحقق وتنشأ استثمارات الأغلبية أو الأقلية، وبناء علي قيم استثماراتها الرأسمالية المختلفة، فإن الشركة س ستزيد أو تنقص حصتها السوقية في هذا القطاع الصناعي المذكور بناء إلي قيم الاستثمارات الرأسمالية المختلفة التي تنشئها الشركة ص.

ويوضح الجدول التالي رقم (١٠/١١) مصفوفة النتائج الخاصة بهذه الحالة، ويمثل الناتج في هذه المصفوفة النسب المئوية التي تمثل مقدار الزيادات في الحصص السوقية للشركة س .

جدول رقم (١٠/١١) مصفوفة المكاسب (نتائج وعوائد) اللاعب س

إستراتيجيات اللاعب ص / إستراتيجيات اللاعب س	ص١ استثمار الأقلية %	ص٢ استثمار الأغلبية %
استثمار الأقلية س١	-٦	١٠
استثمار الأغلبية س٢	٨	٤

يلاحظ انه لا يوجد في مصفوفة النتائج القيمة الرقمية التي ترضي وتحقق كل من شرطي(سمتي) نقطة التلاقي،فبينما أن نسبة ٨% تمثل أكبر قيمة في العمود الأول ص١ إلا أنها لا تمثل القيمة الأصغر في الصف الثاني س٢ ، وبالمثل بينما أن نسبة ١٠% تمثل أكبر قيمة في العمود الثاني ص٢ إلا أنها لا تمثل القيمة الأصغر في الصف الأول س١. ولهذا نعجز عن ولا نستطيع أن نحدد أو نحصل على حل نقطة التلاقي لهذه المباراة، ولهذا يمكن الجزم بأن هذه المباراة لا تعد مباراة ذات إستراتيجية مطلقة، وإنما نحن نواجه مباراة ذات إستراتيجية مختلطة.

ويوجد العديد من الطرق التي يمكن استخدام إحداها لحل المباريات الثنائية الصفرية ذات إستراتيجية مختلطة ، وتتمثل هذه الطرق في الآتي:

١- الطريقة الحسابية. ٢- طريقة الاحتمالات المشتركة.٣- طريقة العائد والخسارة المتوقعة. ٤- طريقة البرمجة الخطية. ٥- الطريقة البيانية.

ينطوي حل المباراة الثنائية الصفرية ذات الإستراتيجيات المختلطة علي تحديد جزء أو نسبة من الزمن لكل إستراتيجية يجب أن تستخدم لتعظيم العوائد أو لتدنية الخسائر. ويحاول كل لاعب أن يصيغ ويحدد الإستراتيجية التي يتحقق عندها حالة السواء أي يتساوي عنده اختيار إستراتيجية الخصم، ويمكن تحقيق هذا باختيار كل إستراتيجية بنسبة معينة من الوقت بالأسلوب الذي يجعل المكاسب المتوقعة أو الخسائر المتوقعة للاعب متساوية بصرف النظر عن الإستراتيجية التي يختارها الخصم، ويتحقق هذا التساوي أو حالة السواء بتحديد احتمال معين لاختيار الإستراتيجية ، ويمكن تحديد هذا الاحتمال باتباع أحدي الطلاق التالية:

١١/٤/٤/١: حل المباريات الثنائية الصفرية ذات الاستراتيجيات المختلطة بالطريقة الحسابية:

يقتصر استخدام الطريقة الحسابية في تحديد الإستراتيجيات المثلي للمباريات الثنائية الصفرية ذات الاستراتيجيات المختلطة التي تتكون من صفين وعمودين أي علي المصفوفات التي تتكون من صفين وعمودين [٢×٢] وهي المباريات التي يكون أمام متخذ القرار أو اللاعب إستراتيجيتين يختار من بينهما، وتتمثل خطوات الحل وفقاً لهذه الطريقة الحسابية في الآتي:

١- إيجاد فروق الصفوف لكل صف من صفوف مصفوفة نتائج المباراة، ويحسب الفرق بطرح القيمة الأصغر من القيمة الأكبر.
٢- إيجاد فروق الأعمدة لكل عمود من أعمدة مصفوفة نتائج المباراة، ويحسب الفرق بطرح القيمة الأصغر من القيمة الأكبر.

واستناداً إلي البيانات الواردة بالجدول رقم (١٠/١١) السابق تظهر المصفوفة موضحاً بها فروق الصفوف والأعمدة علي النحو التالي:

	ص		
	%	%	فروق الصفوف
س	٦-	١٠	١٦
	٨	٤	٤
فروق الأعمدة	١٤	٦	

٣ - تبديل مواقع فروق الصفوف وتبديل مواقع فروق الأعمدة كما يلي:

	ص %	%	فروق الصفوف بعد التبديل
س	٦-	١٠	٤
	٨	٤	١٦
فروق الأعمدة بعد التبديل	٦	١٤	

٤ - لإيجاد نسبة قيمة كل فرق بعد التبديل إلي مجموع الفروق سواء للصفوف أو الأعمدة لتظهر المصفوفة كما يلي:

	ص %	%	فروق الصفوف بعد التبديل
س	٦-	١٠	$\frac{٤}{٢٠}$
	٨	٤	$\frac{١٦}{٢٠}$
فروق الأعمدة بعد التبديل	$\frac{٦}{٢٠}$	$\frac{١٤}{٢٠}$	

	ص %	%	فروق الصفوف بعد التبديل
س	٦-	١٠	$\frac{٢}{١٠}$ = ٠,٢
	٨	٤	$\frac{٨}{١٠}$ = ٠,٨
فروق الأعمدة بعد التبديل	$\frac{٣}{١٠}$	$\frac{٧}{١٠}$	
	٠,٣	٠,٧	

وهكذا يتضح أن احتمال أن الشركة س تختار إستراتيجيتها الأولي س١ يساوى ٠,٢ واحتمال اختيارها لإستراتيجيتها الثانية س٢ يساوى ٠,٨، وبالتالي فإن مكاسبها المتوقعة تكون متساوية بصرف النظر عن اختيار الشركة ص لإستراتيجيتيها ص١ أو ص٢ والتي تحدد احتمال اختيار كل منهما بـ ٠,٣، و٠,٧ علي التوالي، فعلي سبيل المثال لو اختارت الشركة ص إستراتيجيتها الأولي ص١ فإن النتائج المحتملة للشركة س تساوي -٦% ، و٨%، وإذا الشركة س اختارت إستراتيجيتها الأولي س١ باحتمال قدره ٠,٢

ولهذا فإنها ستختار إستراتيجيتها الثانية $س_٢$ باحتمال قدره ٠,٨، وبالتالي فإن القيمة المتوقعة للعائد تساوي الآتي:

٠,٢(-٦) + ٠,٨ (٨) = ٥,٢

وهو يساوي إستراتيجية العوائد للشركة س بفرض اختيار الشركة ص لإستراتيجيتها الأولي $ص_١$

وأيضا إذا الشركة ص اختارت إستراتيجيتها الثانية $ص_٢$ فإن العوائد المتوقعة للشركة س تساوي الأتي:

٠,٢(١٠) + ٠,٨ (٤) = ٥,٢

وهذه القيمة تساوي المكاسب المتوقعة لإستراتيجية الشركة س بفرض اختيار الشركة ص لإستراتيجيتها الثانية $ص_٢$.

أما إذا حسبنا الخسائر المتوقعة للشركة ص بصرف النظر عن اختيار الشركة س لإستراتيجيتها الأولي $س_١$ فعلي سبيل المثال إذا الشركة س اختارت إستراتيجيتها الأولي $س_١$ فإن الخسائر المحتملة للشركة ص نكون (-٦%)، و١٠%، وبالتالي فإن الخسائر المتوقعة للشركة ص تساوى الآتي:

٠,٣(-٦) + ٠,٧ (١٠) = ٥,٢.

أما الخسائر المحتملة للشركة ص حالة اختيار الشركة س لإستراتيجيتها الثانية $س_٢$ فتساوي (٨% و ٤%) وبالتالي فإن الخسائر المتوقعة للشركة ص فتساوي في هذه الحالة الآتي:

٠,٣(٨) + ٠,٧ (٤) = ٥,٢%.

ويلاحظ تطابق النتائج مع تلك التي نتجت للشركة س. وتنتقد الطريقة الحسابية بعدم إمكانية استخدامها لحل المباريات الثنائية الصفرية ذات الإستراتيجيات المختلطة التي يزيد فيها عدد الإستراتيجيات عن إستراتجيتين .

١١/٤/٤/٢: حل المباريات الثنائية الصفرية ذات الاستراتيجيات المختلطة بطريقة الاحتمالات المشتركة:

تستخدم هذه الطريقة لتحديد قيمة المباراة استناداً إلي أن تحقق كل عنصر من عناصر مصفوفة نتائج المباراة يتوقف ويرتهن باحتمال اختيار إستراتيجية الصف الذي يقع فيه العنصر، واحتمال اختيار إستراتيجية العمود

الذي يقع فيه هذا العنصر، وبناء علي ذلك فإن القيمة المتوقعة لكل عنصر من عناصر مصفوفة نتائج المباراة يمكن حسابه بالمعادلة رقم (١١/١) التالية:

القيمة المتوقعة للعنصر = قيمة العنصر × الاحتمال المشترك لحدوث العنصر (١١/١)

ويحسب الاحتمال المشترك لحدوث العنصر وفقاً للمعادلة رقم (١١/٢) التالية:

الاحتمال المشترك لحدوث العنصر = احتمال اختيار إستراتجية الصف الذي يقع فيها × احتمال اختيار إستراتيجية العمود الذي يقع فيها العنصر (١١/٢)

وليان وإيضاح كيفية تطبيق هذه الطريقة ، فإننا سنعود إلي عناصر مصفوفة نتائج المباراة التي حصلنا عليها بعد تطبيق الطريقة الحسابية عليها والتي تظهر علي النحو التالي:

ص

	%	%	فروق الصفوف بعد التبديل	
س	٦-	١٠	٢/١٠	٠,٢
	٨	٤	٨/١٠	٠,٨
فروق الأعمدة بعد التبديل	٣/١٠	٧/١٠		
	٠,٣	٠,٧		

يلاحظ من المصفوفة أن احتمال اختيار الشركة س لإستراتيجيتها الأولي س١ يساوي ٠,٢، وأيضاً احتمال اختيار الشركة س لإستراتيجيتها الثانية س٢ يساوي ٠,٨ وجموع هذين الاحتمالين يساوي (٠,٢ + ٠,٨) واحد صحيح، وأيضاً احتمال اختيار الشركة ص لإستراتيجيتها الأولي ص١ يساوي٠,٣، وأيضاًاحتمال اختيار الشركة ص لإستراتيجيتها الثانية ص٢ يساوي ٠,٧ ومجموع هذين الاحتمالين يساوي(٠,٣ + ٠,٧) واحد صحيح.

وبفحص مصفوفة عوائد المباراة يتضح أن تحقق العنصر (-٦) يرتبط باحتمال اختيار الشكة س لإستراتيجيتها الأولي البالغ ٠,٢، واحتمال اختيار الشركة ص لإستراتيجيتها الأولي ص١ البالغ ٠,٣ لإي آن واحد، ويعني هذا

أن احتمال تحقق العنصر (-٦) يساوي الاحتمال المشترك لاختيار الشركتين لإستراتيجية الأولي لكل منهما، ويتحدد هذا الاحتمال المشترك كالآتي:

الاحتمال المشترك= ٠,٢ × ٠,٣ = ٠,٠٦ (٢/١١)

ويتطلب حساب قيمة المباراة وفقاً لطريقة الاحتمالات المشتركة إجراء الخطوات التالية:

١- إيجاد الاحتمالات المشتركة لحدوث كل عنصر من عناصر مصفوفة عوائد المباراة وفقاً للمعادلة (٢/١١).

٢- ضرب قيمة العنصر في الاحتمال المشترك لحدوث العنصر وفقاً للمعادلة رقم (١/١١) السابقة.

٣- إيجاد مجموع حاصل ضرب عناصر مصفوفة نتائج المباراة في الاحتمالات المشتركة لتحقق العناصر للحصول علي قيمة المباراة .

ويوضح الجدول رقم (١١/١١) التالي كيفية تطبيق الخطوات الثلاثة السابقة والذي يظهر علي النحو التالي:

١	٢		٣	٤=١×٣
عناصر مصفوفة نتائج المباراة %	الإستراتيجيات التي تؤدي إلي تحقق العنصر		الاحتمال المشترك لتحقق العنصر	القيمة المتوقعة للعنصر
	س	ص		
-٦	الأولي	الأولي	٠,٢×٠,٣=٠,٠٦	-٠,٠٣٦
١٠	الأولي	الثانية	٠,٢×٠,٧=٠,١٤	٠,٠١٤
٨	الثانية	الأولي	٠,٨×٠,٣=٠,٢٤	٠,٠١٩٢
٤	الثانية	الثانية	٠,٨×٠,٧=٠,٥٦	٠,٠٢٢٤
القيمة المتوقعة لعوائد المباراة				٠,٠٥٢

وهكذا يتضح أن قيمة المباراة تساوي ٠,٠٥٢ = ٥,٢% وهي نفس القيمة الناتجة عن تطبيق الطريقة الحسابية.

١١/٣/٤/٤: حل المباريات الثنائية الصفرية ذات الاستراتيجيات المختلطة بطريقة المكاسب المتوقعة:

سبق أن أشرنا أن حل المباريات الثنائية الصفرية ذات الاستراتيجيات المختلطة ينطوي علي تحديد جزء أو نسبة من الوقت لكل إستراتيجية يجب علي اللاعبين أن يستخدموها لتعظيم العوائد أو لتدنية الخسائر، ولهذا يحاول كل لاعب أن يصيغ ويختار الإستراتيجية التي يتحقق عندها حالة السواء بصرف النظر عن الإستراتجية التي يختارها الخصم، ويمكن تحقيق هذا باختيار كل إستراتيجية لفترة أو بنسبة من الوقت بالأسلوب الذي يجعل العوائد المتوقعة (أو الخسائر المتوقعة) متساوية بصرف النظر عن الإستراتيجية التي يختارها الخصم ، وتنشأ حالة السواء هذه بتحديد احتمال معين لاختيار الإستراتيجية.

ولتحديد هذا الاحتمال، فإننا نبين ونوضح بأن الشركة س ستختار من بين الإستراتيجيتين $س_{١}$ أو $س_{٢}$، وبالتالي فإن عوائدها المتوقعة تكون متساوية بصرف النظر عن اختيار الشركة ص لأحدي إستراتيجيتيها $ص_{١}$ أو $ص_{٢}$ فعلي سبيل المثال إذا اختارت الشركة ص إستراتيجيتها الأولي $ص_{١}$ فإن العوائد المحتملة للشكة س تكون (-٦%) و(٨%)، وإذا اختارت الشركة س إستراتيجيتها الأولي $س_{١}$ باحتمال قدره ح وبالتالي ستختار إستراتيجيتها الثانية $س_{٢}$ باحتمال قدره (١-ح) ، ولهذا فإن عوائدها المتوقعة تساوي الآتي:

العوائد المتوقعة للشركة س = ح(-٦%) + (١-؛)((٨%) =

مكاسب الشركة س بفرض اختيار الشركة ص لإستراتيجيتها الأولي $ص_{١}$ أما إذااختارت الشركة ص إستراتيجيتها الثانية $ص_{٢}$ فإن العوائد المتوقعة للشركة س تساوي الآتي:

العوائد المتوقعة للشركة س = ح(١٠%) + (١- ح)((٤%) =

مكاسب الشركة س بفرض اختيار الشركة ص لإستراتيجيتها الثانية $ص_{٢}$.

ولكي تكون الشركة س في حالة سواء للإستراتيجية التي تختارها الشكة ص، فإن العائد المتوقع للشركة س في كل من الاختيارين للإستراتيجيتين المحتملتين للشركة ص يجب أن يكونا متساويان، ولذا فإننا سنساوي بين

المكسبين، وبحلهما نستنتج قيمة الاحتمال ح الذي يحقق حالة السواء كما يتضح من الإجراء الآتي:

اختيار الشركة ص لإستراتيجيتها الأولي ص١	= اختيار الشركة ص لإستراتيجيتها الثانية ص٢
ح (-٦%) + (١-ح)(٨%)	= ح(١٠%)+ (١-ح)(٤%)
- ٠,٠٦ ح + ٠,٠٨ - ٠,٠٨ح	= ٠,١٠ ح + ٠,٠٤ - ٠,٠٤ح =
- ٠,١٤ ح + ٠,٠٨	= ٠,٠٦ ح + ٠,٠٤
- ٠,١٤ ح + ٠,٠٨- ٠,٠٦ ح - ٠,٠٤	= صفر
- ٠,٢ ح + ٠,٠٤	= صفر
٠,٠٤	= ٠,٢ ح
ح	= ٠,٢
(١-ح)	= ٠,٨

ووفقاً لذلك يجب علي الشركة س أن تختار إستراتيجيتها الأولي س١ باحتمال قدره ٢٠% أو ٠,٢ وأن تختار إستراتيجيتها الثانية س٢ باحتمال قدره ٨٠% أو٠,٨ ، وسينتج ويتحقق عن هذا نفس قيمة العوائد المتوقعة بصرف النظر عن الإستراتيجية التي تختارها الشركة ص٠

ويجب علي الشركة ص أن تحدد احتمالي اختيار إستراتيجيتيها ص١ أو ص٢ بمساواة الخسائر المتوقعة للشركة ص حالة اختيار الشركة س لإستراتيجيتها الأولي س١ أو إستراتيجيتها الثانية س٢ ويتحقق هذا بإجراء الآتي:

اختيار الشركة س لإستراتيجيتها الأولي س١	= اختيار الشركة س لإستراتيجيتها الثانية س٢
حَ (-٦%) + (١-حَ)(١٠%)	= حَ (٨%)+ (١-حَ)(٤%)
- ٠,٠٦ حَ + ٠,١ - ٠,١حَ	= ٠,٠٨ حَ + ٠,٠٤ - ٠,٠٤حَ =
- ٠,١٦ حَ + ٠,١	= ٠,٠٤ حَ + ٠,٠٤
- ٠,١٦ حَ + ٠,١- ٠,٠٤ حَ - ٠,٠٤	= صفر
- ٠,٢ حَ + ٠,٠٦	= صفر
٠,٠٦	= ٠,٢ حَ
حَ	= ٠,٣
(١-ح)	= ٠,٧

وهكذا يجب علي الشركة ص أن تحدد احتمالي اختيار إستراتيجيتيها الأولي ص١ باحتمال قدره ٣٠% أو ٠,٣٠ وتحدد احتمال اختيار إستراتيجيتها الثانية ص٢ بـ٧٠% أو ٠,٧٠ ،وسينتج عن هذا نفس قيمة الخسائر المتوقعة للشركة ص بصرف النظر عن الإستراتيجية التي تختارها الشركة س سواء كانت إستراتيجيتها الأولي س١ أو إستراتيجيتها الثانية س٢.

وتوجد لهذه المباراة قيمة مشتركة لكل من الشركتين س ، و ص والتي أوجدناها وأخذت صورة القيمة المتوقعة لعوائد المباراة، وهذه القيم المتوقعة تحسب كما يلي:

العوائد المتوقعة للشركة س:

إذا الشركة ص اختارت إستراتيجيتها الأولي ص١ :

٠,٢(-٦%) +٠,٨ (٨%) = ٢,٥%

إذا الشركة ص اختارت إستراتيجيتها الثانية ص٢ :

٠,٢ (١٠%)+ ٠,٨ (٤%) = ٢,٥%

الخسائر المتوقعة للشركة ص إذا الشركة س اختارت إستراتيجيتها الأولي س١ :

٠,٣(-٦%) +٠,٧ (١٠%) = ٢,٥%

الخسائر المتوقعة للشركة ص إذا الشركة ص اختارت إستراتيجيتها الثانية س٢ :

٠,٣ (٨%)+ ٠,٧ (٤%) = ٢,٥%

وهكذا يتضح من حل المباراة ذات الإستراتيجيات المختلطة أن القيمة المتوقعة لعوائد (لمكاسب أو لنواتج) المباراة ذات الإستراتيجيات المختلطة تساوي ٢,٥% ، وهي تعبر عن القيمة المتوقعة لعوائد الشركة في الأجل الطويل . وتجدر الإشارة هنا إلي أنه يمكن استخدام نموذج البرمجة الخطية وأيضا يمكن استخدام الطريقة البيانية لاشتقاق واستنتاج القيمة المتوقعة لعوائد (لمكاسب أو لنواتج) المباراة ذات الإستراتيجيات المختلطة إلا أن المقام لا يتسع هنا لمناقشتها.

١١/ ٥: الاستراتيجيات المسيطرة :

إذا وجدت وظهرت مشكلة الإستراتيجيات المسيطر عليها في مصفوفة المباراة، فإن الأمر يقتضي استبعادها وعزلها وفصلها عن مصفوفة نتائج المباراة، حيث أن هذه الإستراتيجيات لا يلتفت إليها ولا يجب اختيارها أو اللعب فيها علي الإطلاق ، وبالتالي يستطيع اللاعب (المتنافس) أن يعزل أو يستبعد الإستراتيجيات المسيطر عليها من بين الإستراتيجيات المتاحة للاختيار من بينها، فإذا كان لهذا اللاعب إستراتيجية أخرى مسيطرة (أفضل) أي ستدر عليه عوائد أفضل . ويمكن تخفيض حجم مصفوفة المباراة بتطبيق قواعد السيطرة، وحلها باستخدام أي من طريقة من طرق حل المباريات سواء المباريات ذات الإستراتيجيات المطلقة أو المختلطة، ولإيضاح مفهوم السيطرة وكيفية تطبيقه نفترض المثال الموضح بياناته في الجدول رقم (١٢/١١) التالي:

مثال:

يوضح الجدول التالي رقم (١٢/١١) مصفوفة النتائج الخاصة من وجهة نظر الشركة س

جدول رقم (١٢/١١) مصفوفة المكاسب (نتائج وعوائد) اللاعب س

إستراتيجيات اللاعب ص / إستراتيجيات اللاعب س	ص١	ص٢	ص٣
س١	٤-	٨	١٠
س٢	٠	٦-	١٢
س٣	١٠-	٢	١٢-

والمطلوب: إيجاد قيمة المباراة .

لتحديد قيمة المباراة باستخدام مفهوم السيطرة يقتضي الأمر تفسير قواعد السيطرة .

١١/ ١/٥ : قواعد السيطرة.

- مفهوم قاعدة السيطرة للاعب (لمتنافس) الصفوف:

نظراً لأننا نفترض أن القيمة الموجب في صف مصفوفة نتائج أو عوائد المباراة تمثل ربح وعائد للاعب (لمتنافس) الصفوف ، وأن القيمة الموجبة الأكبر تكون مفضلة علي القيمة الموجبة الأصغر ، وبالتالي يجب علي هذا اللاعب أن يهمل ويتجاهل القيمة الموجبة الأصغر نظراً لسيطرة وأفضلية القيمة الموجبة الأكبر عليها ، وبالتالي يجب علي للاعب (لمتنافس) الصفوف إذا وجد صف عناصره أكبر من أو تساوي العناصر المناظرة لها في أي صف آخر مقارن به، أن يغفل ويتجاهل ويستبعد الصف ذو العناصر الأصغر من أو تساوي من مصفوفة نتائج أو عوائد المباراة، ويسمي هذا الصف بالصف المستبعد أو المسيطر عليه، أما الصف ذو العناصر الأكبر من أو تساوي في مصفوفة نتائج أو عوائد المباراة فيعرف بالصف المسيطر أي المفضل .

- مفهوم قاعدة السيطرة للاعب (لمتنافس) الأعمدة:

نظراً لأننا نفترض أن القيمة الموجب في عمود مصفوفة نتائج أو عوائد المباراة تمثل خسارة للاعب (لمتنافس) الأعمدة، وأن القيمة الموجبة الأصغر تكون مفضلة علي القيمة الموجبة الأكبر لأنها تمثل خسائر أقل، وبالتالي يجب علي هذا اللاعب أن يهمل ويتجاهل القيمة الموجبة الأكبر نظراً لسيطرة وتفضيل القيمة الموجبة الأصغر عليها، وبالتالي يجب علي للاعب (لمتنافس) الأعمدة إذا وجد صف عناصره أكبر من أو تساوي العناصر المناظرة لها في أي صف آخر مقارن به، أن يغفل ويتجاهل ويستبعد العمود ذو العناصر الأكبر من أو تساوي من مصفوفة نتائج أو عوائد المباراة، ويسمي هذا العمود بالعمود المستبعد أو المسيطر عليه، أما العمود ذو العناصر الأصغر من أو تساوي في مصفوفة نتائج أو عوائد المباراة فيعرف بالعمود المسيطر أي المفضل .

١١/ ٢/٥: تطبيق قواعد السيطرة علي المثال:

وبتطبيق قواعد السيطرة علي استراتيجيات صفوف مصفوفة نتائج أو عوائد المباراة القائمة علي البيانات الواردة بالجدول رقم (١٢/١١) السابق والتي تظهر علي النحو التالي :

		ص		
		ص$_{١}$	ص$_{٢}$	ص$_{٣}$
س	س$_{١}$	٤-	٨	١٠
	س$_{٢}$	٠	٦-	١٢
	س$_{٣}$	١٠-	٢	١٢-

- بمقارنة عناصر الصف الثالث س$_{٣}$ (الإستراتيجية الثالثة س$_{٣}$) بعناصر الصف الأول س$_{١}$ (الإستراتيجية الأولي س$_{١}$) يتضح أن الإستراتيجية الثالثة س$_{٣}$ مسيطر عليها ويجب استبعادها من مصفوفة نتائج أو عوائد المباراة باعتبارها إستراتيجية رديئة غير جيدة وغير مربحة ومخسرة لتظهر المصفوفة المصغرة بعد استبعاد الصف الثالث علي النحو التالي:

		ص		
		ص$_{١}$	ص$_{٢}$	ص$_{٣}$
س	س$_{١}$	٤-	٨	١٠
	س$_{٢}$	٠	٦-	١٢

- وباستخدام بيانات مصفوفة عوائد المباراة المصغرة أعلاه وتطبيق قواعد السيطرة علي إستراتيجيات الشركة ص ، يتضح من مقارنة عناصر قيم العمود الثالث ص$_{٣}$ (الإستراتيجية الثالثة ص$_{٣}$ للشركة ص) بعناصر قيم العمود الثاني ص$_{٢}$ (الإستراتيجية الثانية ص$_{٢}$ للشركة ص) نجد أن الإستراتيجية الثالثة ص$_{٣}$ للشركة ص مخسرة وغير مربحة ومسيطر عليها ويجب استبعادها من مصفوفة عوائد المباراة ،أما الإستراتيجية الثانية ص$_{٢}$ للشركة ص فتعد إستراتيجية مسيطرة ومفضلة لتظهر مصفوفة نتائج أو عوائد المباراة بعد تطبيق خطوة السيطرة هذه علي النحو التالي:

ص

		ص$_1$	ص$_2$
س	س$_1$	٤-	٨
	س$_2$	٠	٦-

- ولإيجاد نقطة التلاقي يتم اختيار الأتي :

أصغر مفردة في الصف الأول ٤- أكبر مفردة في العمود الأول ٠

أصغر مفردة في الصف الثاني ٦- أكبر مفردة في العمود الثاني ٨

ونظراً لأن أكبر مفردة في العمود الأول تساوي = ٠ لا تمثل أصغر مفردة في صفها، وأيضاً ونظراً لأن أكبر مفردة في العمود الثاني تساوي = ٨ لا تمثل أصغر مفردة في صفها، فلا توجد نقطة تلاقي للمباراة ، نظر لأننا أمام مصفوفة عوائد مباراة ليست ذات استراتيجيات مطلقة وإنما نحن أمام مصفوفة عوائد مباراة ذات استراتيجيات مختلطة . ويمكن حلها بأحدي طرق الخمس السابق ذكرها، وبتطبيق خطوات حل الطريقة الحسابية السابق عرضها نصل إلي اعتمالي اختيار كل إستراتيجية من الإستراتيجيتين بكل شركة وأيضاً القيمة المتوقعة لعوائد المباراة من وجهة نظر كل شركة من الشركتين س ، وص والتي تظهر بالجدول التالي:

الشركة س	القيمة	الشركة ص	القيمة
احتمال اختيار الإستراتيجية الأولي س$_1$	٠,٣٣٣	احتمال اختيار الإستراتيجية الأولي ص$_1$	٠,٧٧٨
احتمال اختيار الإستراتيجية الأولي س$_2$	٠,٦٦٧	احتمال اختيار الإستراتيجية الأولي ص$_1$	٠,٢٢٢
قيمة المباراة	٠,٦٦٧	قيمة المباراة	٠,٦٦٧

١١/ ٦: حل المباريات الثنائية الصفرية ذات الاستراتيجيات المختلطة بطريقة المباريات الفرعية:

ناقشنا في الجزء السابق مفهوم وقاعدتي السيطرة، كوسيلة لتصغير حجم مصفوفة عوائد المباراة التي تزيد عن صفين وعمودين [٢×٢] . وإذا أمكننا تخفيض حجم مصفوفة عوائد المباراة إلي مصفوفة من صفين،عمودين

أصبح من السـهل حل المبـاراة. ، ولكن قد يصعب فـي بعض الأحيـان تصـغير حجم مصفوفة عوائد المباراة التـي تزيد عن صفين وعمودين [٢×٢] لكـي تصبح مصفوفة من صفين وعمودين [٢×٢] ، وهنا نلجأ إلي استخدام أسلوب المباريات الفرعية ، ونوضح ذلك من خلال المثال التالي:

مثال:

يوضح الجدول التالي رقم (١٣/١١) مصفوفة النتائج الخاصة من وجهة نظر الشركة س.

جدول رقم (١٣/١١) مصفوفة المكاسب (نتائج وعوائد) اللاعب س

إستراتيجيات اللاعب ص / إستراتيجيات اللاعب س	ص$_١$	ص$_٢$	ص$_٣$	ص$_٣$	ص$_٣$
س$_١$	٥	١٠	٢٥	-٢٠	-٤٠
س$_٢$	٠	٤٥	٦٠	٤٥	٥٠

والمطلوب: إيجاد قيمة المباراة باستخدام قواعد السيطرة وأسلوب المباريـات الفرعية.

لتحديـد قيمـة المبـاراة باسـتخدام قواعـد السـيطرة وأسـلوب المباريـات الفرعية نتبع الآتي:

١- إعداد مصفوفة عوائد المباراة:

		ص				
		ص$_١$	ص$_٢$	ص$_٣$	ص$_٤$	ص$_٥$
س	س$_١$	٥	١٠	٢٥	-٢٠	-٤٠
	س$_٢$	٠	٤٥	٦٠	٤٥	٥٠

أ – بتطبيق قواعد السيطرة:

- وباسـتخدام بيانـات مصـفوفة عوائـد المبـاراة أعـلاه وتطبيـق قواعـد السـيطرة علـي إسـتراتيجيات الشـركة ص ، يتضـح مـن مقارنـة عناصـر قـيم العمـود الثـاني ص$_٢$ (الإسـتراتيجية الثالثـة ص$_٢$ للشـركة ص) بعناصـر قـيم العمـود الأول ص$_١$ (الإسـتراتيجية الأولـي ص$_١$ للشـركة ص) نجـد أن

الإستراتيجية الثانية ص$_{٢}$ للشركة ص مخسرة وغير مربحة ومسيطر عليها ويجب استبعادها من مصفوفة عوائد المباراة ،أما الإستراتيجية الأولي ص$_{١}$ للشركة ص فتعد إستراتيجية مسيطرة ومفضلة لتظهر مصفوفة نتائج أو عوائد المباراة بعد تطبيق خطوة السيطرة هذه علي النحو التالي:

ص

س		ص$_{١}$	ص$_{٢}$	ص$_{٣}$	ص$_{٤}$
	س$_{١}$	٥	٢٥	٢٠-	٤٠-
	س$_{٢}$	٠	٦٠	٤٥	٥٠

- وباستخدام بيانات مصفوفة عوائد المباراة أعلاه وتطبيق قواعد السيطرة علي إستراتيجيات الشركة ص ، يتضح من مقارنة عناصر قيم العمود الثاني ص$_{٣}$ (الإستراتيجية الثالثة ص$_{٣}$ للشركة ص) بعناصر قيم العمود الأول ص$_{١}$ (الإستراتيجية الأولي ص$_{١}$ للشركة ص) نجد أن الإستراتيجية الثالثة ص$_{٣}$ للشركة ص مخسرة وغير مربحة ومسيطر عليها ويجب استبعادها من مصفوفة عوائد المباراة ،أما الإستراتيجية الأولي ص$_{١}$ للشركة ص فتعد إستراتيجية مسيطرة ومفضلة لتظهر مصفوفة نتائج أو عوائد المباراة بعد تطبيق خطوة السيطرة هذه علي النحو التالي: ص

ص

س		ص$_{١}$	ص$_{٤}$	ص$_{٥}$
	س$_{١}$	٥	٢٠-	٤٠-
	س$_{٢}$	٠	٤٥	٥٠

مما سبق يتضح أن قواعد السيطرة لم تؤدي إلي تصغير حجم مصفوفة عوائد المباراة إلي مصفوفة من صفين وعمودين [٢×٢]، ولا يمكن تطبيق قواعد السيطرة علي أعمدتها لعدم توافر شرط قاعدتي السيطرة، ولكي نحل هذه المباراة نجزأ ونقسم مصفوفة عوائد المباراة المتبقية إلي ثلاثة مباريات فرعية بحيث تتكون كل مباراة فرعية من صفين وعمودين [٢×٢]، وتظهر هذه المباريات الفرعية الثلاثة علي النحو التالي:

المباراة الفرعية الأولي	المباراة الفرعية الثانية	المباراة الفرعية الثالثة
ص١ ص٤ س١ (٥ ٢٠-) س٢ (٠ ٤٥)	ص٤ ص٥ س١ (٢٠- ٤٠-) س٢ (٤٥ ٥٠)	ص١ ص٥ س١ (٥ ٤٠-) س٢ (٠ ٥٠)

يلاحظ أن الشركة ص تتجاهل أحد الأعمدة الثلاثة، حيث تتجاهل العمود الثالث في المباراة الفرعية الأولي، وتتجاهل العمود الأول في المباراة الفرعية الثانية، وتتجاهل العمود الثالث في المباراة الفرعية الثالثة. وتحل كل مباراة فرعية من المباريات الفرعية الثلاثة سواء كانت مباراة فرعية ذات إستراتيجية مطلقة أو مختلطة، ويتم اختيار أصغر نتيجة لهذه المباريات الفرعية الثلاثة لتحديد نتيجة المباراة .

حل المباريات الفرعية

١- حل المباراة الفرعية الأولي بالطريقة الحسابية:

		ص	
		ص١	ص٤
س	س١	٥	٢٠-
	س٢	٠	٤٥

		ص		
		ص١	ص٤	
س	س١	٥	٢٠-	٢٥
	س٢	٠	٤٥	٤٥
		٥	٦٥	

		ص		
		ص١	ص٤	
س	س١	٥	٢٠-	٤٥
	س٢	٠	٤٥	٢٥
		٥	٦٥	

ص

س		$ص_1$	$ص_4$	
	$س_1$	٥	-٢٠	٤٥/٧٠
	$س_2$	٠	٤٥	٢٥/٧٠
		٦٥/٧٠	٥/٧٠	

ص

س		$ص_1$	$ص_4$	
	$س_1$	٥	-٢٠	٩/١٤
	$س_2$	٠	٤٥	٥/٧٠
		١٣/١٤	١/١٤	

قيمة المباراة = ق= ٥× $\frac{١٣}{١٤}$ + -٢٠ × $\frac{١}{١٤}$ = $\frac{٤٥}{١٤}$ = ٣ $\frac{٣}{١٤}$ = ٣,٢١٤

٢- حل المباراة الفرعية الثانية بالطريقة العادية نظراً لأنها مباراة ذات إستراتيجية مطلقة:

ص

س		$ص_4$	$ص_5$
	$س_1$	-٢٠	-٤٠
	$س_2$	٤٥	٥٠

أصغر مفردة في الصف الأول -٤٠ أكبر مفردة في العمود الأول ٤٥

أصغر مفردة في الصف الثاني ٤٥ أكبر مفردة في العمود الثاني ٥٠

ونظراً لأن أكبر مفردة في العمود الأول تساوي = ٤٥ تمثل أصغر مفردة في صفها، فإن نقطة تلاقي المباراة (نتيجة المباراة) = ٤٥

١- حل المباراة الفرعية الثالثة بالطريقة الحسابية:

ص

س		ص٤	ص٥
س	س١	٥	٤٠-
	س٢	٠	٥٠

ص

س		ص١	ص٤	
س	س١	٥	٤٠-	٤٥
	س٢	٠	٥٠	٥٠
		٥	٩٠	

ص

س		ص١	ص٤	
س	س١	٥	٤٠-	٥٠
	س٢	٠	٥٠	٤٥
		٩٠	٥	

ص

س		ص١	ص٤	
س	س١	٥	٤٠-	٥٠ / ٩٥
	س٢	٠	٥٠	٤٥ / ٩٥
		٩٠ / ٩٥	٥ / ٩٥	

ص

س		ص١	ص٤	
	س١	٥	-٤٠	$\frac{١٠}{١٩}$
	س٢	٠	٥٠	$\frac{٩}{١٩}$
		$\frac{١٨}{١٩}$	$\frac{١}{١٩}$	

قيمة المباراة = ق= ٥× $\frac{١٨}{١٩}$ + -٤٠ × $\frac{١}{١٩}$ = $\frac{٤٥}{١٤}$ = ٢ $\frac{١٢}{١٩}$ = ٢,٣٦٢

نتيجة المباراة الفرعية الأولي	نتيجة المباراة الفرعية الثانية	نتيجة المباراة الفرعية الثالثة
٣,٢١٤	٤٥	٢,٣٦٢

قيمة المباراة = ق= ٢,٣٦٢ = أصغر نتيجة مباراة فرعية وهي المباراة الفرعية الثالثة.

تطبيقات
وحالات عملية

الفصل الأول
الإطار العام لأسلوب البرمجة الخطية

- **تمرين رقم (١):**

تنتج إحدى المنشآت أربع منتجات، ويمر كل منتج منهم بمرحلتين صناعيتين هما: مرحلة التقطيع، ومرحلة التشطيب، ويوضح الجدول التالي الوقت اللازم لإنتاج الوحدة من كل منتج في كل مرحلة:

المنتجات / المراحل	المنتج الأول	المنتج الثاني	المنتج الثالث	المنتج الرابع
مرحلة التقطيع	٧	٦	٩	٨
مرحل التشطيب	٥	٨	٧	٦

هذا، وتبلغ الساعات المتاحة في مرحلة التقطيع ٣٠٠ ساعة أسبوعيا وفي مرحلة التشطيب ٢٠٠ ساعة أسبوعيا، وفيما يلي البيانات المتوافرة عن أسعار البيع والتكاليف المتغيرة للوحدة من كل منتج:

المنتجات / بيانات المنتجات	المنتج الأول	المنتج الثاني	المنتج الثالث	المنتج الرابع
سعر البيع	٢١	٢٣	٢٨	٣٤
تكاليف الإنتاج:				
تكلفة المواد المباشرة	٣	٥	٦	٤
التكلفة المتغيرة للتقطيع	٥	٤	٨	٨
التكلفة الثابتة للتقطيع	٢	٣	٥	٧
التكلفة المتغيرة للتشطيب	٦	٨	٦	٦
التكلفة الثابتة للتشطيب	٧	٦	٧	٩

- **والمطلوب: صياغة نموذج البرمجة الخطية لتحديد تشكيلة المنتجات المثلى بما يحقق أقصى ربح ممكن.**

الإجابة

- **نلاحظ هنا أننا يمكننا القيام بصياغة نموذج البرمجة الخطية – في ظل الخطوات المبينة سابقاً – وذلك على النحو التالي:**

١- <u>دراسة المشكلة:</u>

تتمثل هذه المشكلة في تحديد تشكيلة المنتجات المثلى، حيث يوجد أمام هذه المنشأة مجموعة بدائل تتمثل في المنتجات الممكن إنتاجها، وتتمثل المشكلة في تحديد تشكيلة المنتجات المثلى من بين هذه المنتجات، وبحيث تحقق أقصى ربح ممكن في حدود الموارد والإمكانيات المحدودة المتاحة للمنشأة.

٢- <u>تحديد متغيرات القرار:</u>

تتمثل متغيرات القرار في هذه المشكلة في التالي:

- إنتاج وبيع المنتج الأول، ويرمز له بالرمز $س_{١}$ <u>للتعبير عن كمية الإنتاج والمبيعات من هذا المنتج.</u>

- إنتاج وبيع المنتج الثاني، ويرمز له بالرمز $س_{٢}$.

- إنتاج وبيع المنتج الثالث، ويرمز له بالرمز $س_{٣}$.

- إنتاج وبيع المنتج الرابع، ويرمز له بالرمز $س_{٤}$.

٣- <u>صياغة دالة الهدف:</u>

ترتيباً على أن الهدف هنا يتمثل في تعظيم الربح، فإن معاملات متغيرات القرار في دالة الهدف تتمثل هنا في: هامش مساهمة الوحدة من كل منتج – حيث يمكن حساب هامش المساهمة عن طريق طرح التكاليف المتغيرة للوحدة من سعر بيع الوحدة – وذلك على النحو التالي:

المنتجات / بيانات المنتجات	المنتج الأول $س_{١}$	المنتج الثاني $س_{٢}$	المنتج الثالث $س_{٣}$	المنتج الرابع $س_{٤}$
سعر بيع الوحدة	٢١	٢٣	٢٨	٣٤
(–) التكلفة المتغيرة للوحدة	(١٤)	(١٧)	(٢٠)	(١٨)
= هامش مساهمة الوحدة	٧	٦	٨	١٦

<u>وعلى ذلك فإننا نستطيع صياغة دالة الهدف على النحو التالي:</u>

<u>المطلوب تعظيم الدالة:</u>

$$ر = ٧ س_{١} + ٦ س_{٢} + ٨ س_{٣} + ١٦ س_{٤}$$

<u>٤- صياغة قيود المشكلة:</u>

تتمثل الموارد المتاحة في هذه المشكلة في الطاقة المتاحة في مركزي: التقطيع والتشطيب، وتتطلب صياغة القيود ضرورة تحديد التالي:

<u>أ- معاملات متغيرات القرار في القيود وتتمثل في احتياجات وحدة المنتج من الساعات في كل مرحلة من مراحل الإنتاج</u>: حيث يحتاج المنتج الأول إلى: ٧ ساعات تقطيع، ٥ ساعات تشطيب، وعلى نفس هذا النمط يمكننا تحديد هذه المعاملات لباقي المنتجات.

<u>ب- الكميات المتاحة من الموارد: وهي: ٣٠٠ ساعة تقطيع؛ و٢٠٠ ساعة تشطيب أسبوعيا.</u>

<u>ويمكن تلخيص البيانات السابقة في الجدول التالي:</u>

متغيرات القرار / الموارد	$س_{١}$	$س_{٢}$	$س_{٣}$	$س_{٤}$	الكميات المتاحة من الموارد
طاقة التقطيع	٧	٦	٩	٨	١٩٠٠
طاقة التشطيب	٥	٨	٧	٦	١٦٠٠

<u>ويتطلب الأمر صياغة قيد لكل مورد من الموارد</u>، فإذا ما أخذنا المورد الأول، والذي يمثل طاقة التقطيع، فإننا نلاحظ أن الوحدة من المنتج الأول ($س_{١}$) تحتاج إلى ٧ ساعات، ولذلك فإن المنتج الأول يحتاج إلى ٧ $س_{١}$ من طاقة التقطيع، أما المنتج الثاني فيحتاج إلى ٦ $س_{٢}$، والمنتج الثالث يحتاج إلى ٩ $س_{٣}$، بينما يحتاج المنتج الرابع إلى ٨ $س_{٤}$ وبالتالي فإن إجمالي الساعات التي يمكن تخصيصها من طاقة التقطيع لكل المنتجات = ٧$س_{١}$ + ٦$س_{٢}$ + ٩$س_{٣}$ + ٨ $س_{٤}$ ويجب أن يكون هذا الإجمالي في حدود طاقة التقطيع أي في حدود ١٩٠٠ ساعة أسبوعياً، حيث يمكن التعبير عن ذلك في صورة المتباينة التالية:

٧$س_{١}$ + ٦$س_{٢}$ + ٩$س_{٣}$ + ٨$س_{٤}$ ≥ ٣٠٠

أما بالنسبة للمورد الثاني فإنه يمكن التعبير عنه رياضياً على نفس المنوال السابق، حيث يصبح هذا القيد في صورة المتباينة التالية:

٥$س_{١}$ + ٨$س_{٢}$ + ٧$س_{٣}$ + ٦$س_{٤}$ ≥ ١٦٠٠

وإذا أضفنا شرط عدم السالبية، فإن الصياغة الكاملة للنموذج تأخذ الشكل التالي:

<u>المطلوب تعظيم الدالة التالية:</u>

ر= ٧س$_{١}$ + ٦س$_{٢}$ + ٨س$_{٣}$ + ١٦س$_{٤}$

<u>وذلك في ظل القيود التالية:</u>

٧س$_{١}$ + ٦س$_{٢}$ + ٩س$_{٣}$ + ٨س$_{٤}$ ≥ ١٩٠٠

٥س$_{١}$ + ٨س$_{٢}$+ ٧س $_{٣}$ + ٦س$_{٤}$ ≥ ١٦٠٠

س$_{١}$ ، س $_{٢}$ ، س $_{٣}$ ، س $_{٤}$ ≤ صفر

<u>وهنا نلاحظ ضرورة أن نراعي إمكانية أن يتضمن النموذج السابق متغيرات جديدة، تأخذ في الحل الأمثل قيمة تعبر عن الطاقة غير المستغلة (إن وجدت)؛ ويُطلق على هذه المتغيرات الجديدة: "المتغيرات الراكدة"،</u> وتأخذ في الحل قيمة تساوي أو أكبر من الصفر، حيث لا يتصور أن تأخذ قيمة سالبة.

<u>وإذا رمزنا للساعات غير المستغلة في مرحلة التجميع بالرمز (غ$_{١}$) وللساعات غير المستغلة في مرحلة التشطيب بالرمز (غ$_{٢}$)، فإننا يمكننا إعادة صياغة النموذج السابق، على النحو التالي:</u>

<u>المطلوب - تعظيم الدالة التالية:</u>

ر =٧س$_{١}$+ ٦س$_{٢}$+ ٨ س$_{٣}$ + ١٦س$_{٤}$+ صفر غ$_{١}$ + صفر غ$_{٢}$

<u>في ظل القيود التالية:</u>

٧س$_{١}$ + ٦س$_{٢}$ + ٩س$_{٣}$ + ٨س$_{٤}$ + غ$_{١}$ = ١٩٠٠

٥س$_{١}$ + ٨س$_{٢}$ + ٧س$_{٣}$ + ٦س$_{٤}$ + غ$_{٢}$ = ١٦٠٠

س$_{١}$، س$_{٢}$، س$_{٣}$، س$_{٤}$، غ$_{١}$، غ$_{٢}$ ≤ صفر

<u>هذا، ويجب مراعاة الملاحظات التالية على النموذج السابق:</u>

١- تمثل س١، س٢، س٣، س٤ متغيرات القرار، أما غ١، غ٢ فتمثل الساعات غير المستغلة، وهي تقابل الطاقة والموارد غير المستغلة.

٢- الدالة المبينة في بداية النموذج، تمثل دالة الهدف، وهي تعبر عن إجمالي هامش المساهمة لمستويات النشاط س$_{١}$، س$_{٢}$، س$_{٣}$، س$_{٤}$

٣- المعادلتان المبينتان عقب دالة الهدف، تمثلان قيود المشكلة بعد تحويلهما من متباينات إلى معادلات بإضافة المتغيرات الراكدة؛ أما المتباينة الأخيرة فتمثل شرط عدم السالبية.

٤- الطاقة المتاحة في مرحلتي التقطيع والتشطيب، تمثل الموارد المتاحة، ويطلق علي الكميات المتاحة منها: قيم الطرف الأيسر للمعادلات أو المتباينات.

٥- أي قيم تأخذها المتغيرات س١، س٢، س٣، س٤، غ١، غ٢: تمثل حلاً للمشكلة؛ فإذا كان هذا الحل يفي بقيود المشكلة: يطلق عليه حينئذٍ حل ممكن، أما إذا كان هذا الحل يحقق أقصى قيمة لدالة الهدف أيضاً، فإنه يعتبر الحل الأمثل.

- **تمرين رقم (٢):**

تنتج إحدى المنشآت أربع منتجات، حيث يتم الإنتاج في ثلاثة مراكز للإنتاج. والمطلوب: صياغة نموذج البرمجة الخطية لهذه المنشأة، لتحديد تشكيلة المنتجات المثلى التى تحقق لها أقصى ربح ممكن.

هذا وتبلغ الطاقة المتاحة في مراكز الإنتاج والكميات المتاحة من المواد الخام ما يلي:

مركز الإنتاج الأول	**٦٥٠,٠٠٠ ساعة**
مركز الإنتاج الثاني	**٥٢٠,٠٠٠ ساعة**
مركز الإنتاج الثالث	**٧٨٠,٠٠٠ ساعة**
المادة الخام ط	**١٩٥,٠٠٠ كيلو جرام**
المادة الخام ق	**١٣٠,٠٠٠ مل ليتر**

وقد أسفرت دراسات السوق، عن أن أقصى كمية يمكن أن يستوعبها السوق من المنتج الأول هي ٦٥٠٠ وحدة، بينما يمكن استيعاب أي كميات من باقي المنتجات.

وفيما يلي الساعات اللازمة لإنتاج كل وحدة من المنتجات في مراكز الإنتاج، واحتياجات الوحدة من المواد الخام، وكذلك هامش مساهمة الوحدة:

المنتجات / بيانات المنتجات	المنتج الأول	المنتج الثاني	المنتج الثالث	المنتج الرابع	
مركز الإنتاج الأول	٦٥	١٠٤	---	---	ساعة
مركز الإنتاج الثاني	٢٦	---	---	٥٢	ساعة
مركز الإنتاج الثالث	١٣	---	١٥٦	٣٩	ساعة
مادة خام ط	٥٢	---	٩١	---	كيلو جرام
مادة خام ق	---	٦٥	---	١١٧	ميللي لتر
هامش المساهمة	١٠٤	٧٨	٥٢	٦٥	جنيهاً

الإجابة

يلاحظ هنا أننا يمكننا صياغة النموذج على النحو التالي:

١- صياغة دالة الهدف: المطلوب تعظيم الدالة التالية:

ر= ١٠٤ س$_{١}$ + ٧٨ س$_{٢}$ + ٥٢ س$_{٣}$ + ٦٥س$_{٤}$

٢- صياغة القيود: يمكن تلخيص معاملات متغيرات القرار في القيود وكذلك الكميات المتاحة من الموارد في الجدول التالي:

متغيرات القرار / الموارد	س$_{١}$	س$_{٢}$	س$_{٣}$	س$_{٤}$	الكميات المتاحة من الموارد
مركز الإنتاج الأول	٦٥	١٠٤	---	---	٦٥٠.٠٠٠
مركز الإنتاج الثاني	٢٦	---	---	٥٢	٥٢٠.٠٠٠
مركز الإنتاج الثالث	١٣	---	١٥٦	٣٩	٧٨٠.٠٠٠
مادة خام ط	٥٢	---	٩١	---	١٩٥.٠٠٠
مادة خام ق	---	٦٥	---	١١٧	١٣٠.٠٠٠

وبناءً على ذلك، فإننا يمكننا صياغة القيود على النحو التالي:

مركز الإنتاج الأول:

٦٥ س$_{١}$+ ١٠٤ س$_{٢}$ $\leq$ ٦٥٠.٠٠٠

مركز الإنتاج الثاني:

٢٦ س١ + ٥٢ س$_{٤}$ $\leq$ ٥٢٠.٠٠٠

مركز الإنتاج الثالث:

١٣ س$_{١}$ + ١٥٦س$_{٣}$ + ٣٩ س$_{٤}$ ≥ ٧٨٠.٠٠٠

المادة الخام ط:

٥٢ س$_{١}$ + ٩١س$_{٣}$ ≥ ١٩٥.٠٠٠

المادة الخام ق:

٦٥ س$_{٢}$ + ١١٧س$_{٤}$ ≥ ١٣٠.٠٠٠

أما فيما يتعلق بأقصى كمية يمكن أن يستوعبها السوق بالنسبة للمنتج الأول، فإنه يمكن صياغة هذا القيد على النحو التالي:

س$_{١}$ ≥ ٦٥٠٠

وعلي ذلك يمكن صياغة النموذج كلملاً على النحو التالي:

المطلوب تعظيم الدالة التالية:

ر= ١٠٤ س$_{١}$ + ٧٨ س$_{٢}$ + ٥٢ س$_{٣}$ + ٦٥ س$_{٤}$

وذلك في ظل القيود التالية:

٦٥ س$_{١}$ + ١٠٤ س$_{٢}$ ≥ ٦٥٠.٠٠٠

٢٦ س$_{١}$ + ٥٢ س$_{٤}$ ≥ ٥٢٠.٠٠٠

١٣س$_{١}$ + ١٥٦س$_{٣}$ + ٣٩ س$_{٤}$ ≥ ٧٨٠.٠٠٠

٥٢ س$_{١}$ + ٩١ س$_{٣}$ ≥ ١٩٥.٠٠٠

٦٥ س$_{٢}$ + ١١٧ س$_{٤}$ ≥ ١٣٠.٠٠٠

س$_{١}$ ≥ ٦٥٠٠

س$_{١}$، س$_{٢}$، س$_{٣}$، س$_{٤}$ ≤ صفر.

الفصل الثاني
الطريقة العامة لحل نموذج البرمجة الخطية
(طريقة السمبلكس) حالة تعظيم الربح

تمرين رقم (١):

تنتج إحدى المنشآت ثلاثة منتجات: أ، ب، جـ؛ يحقق كل منها عائد مساهمة للوحدة قدره: ٤، ٥، ٣ جنيهات علي الترتيب، والآتي بياناً يوضح احتياجات الوحدة من كل منتج من كلٍ من: المواد الخام؛ وساعات الطاقة؛ والكميات المتاحة من هذه الموارد:

الموارد	احتياج وحدة المنتج من الموارد			المتاح من الموارد
	أ	ب	جـ	
مادة خام م	١	١	٤	٦.٠٠٠ كيلو جرام
مادة خام ن	١	٢	١	٧.٠٠٠ كيلو جرام
ساعات الآلات	١	٤	٢	١٢.٠٠٠ ساعة

وقد استخدمت المشأة المذكورة نموذج البرمجة الخطية، لتحديد خليط الإنتاج الأمثل الذي يحقق أقصى ربح ممكن؛ وفيما يلي جدول السمبلكس الأمثل:

ر و			٤	٥	٣	صفر	صفر	صفر
	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	س$_1$	س$_2$	س$_3$	غ$_1$	غ$_2$	غ$_3$
صفر	غ$_3$	٣.٠٠٠	صفر	صفر	٧	٢	٣-	١
٤	س$_1$	٥.٠٠٠	١	صفر	٧	٢	١-	صفر
٥	س$_2$	١.٠٠٠	صفر	١	٣-	١-	١	صفر
اختبار المثالية ص و								
ر و – ص و								

حيث تمثل س$_1$، س$_2$، س$_3$ الكميات الواجب إنتاجها من كل منتج، كما تمثل غ$_1$، غ$_2$، غ$_3$ المتغيرات الراكدة المرتبطة بقيود المادة الخام وساعات تشغيل الآلات.

والمطلوب:

1. **صياغة نموذج البرمجة الخطية لهذه المشكلة في صورته الأساسية.**

٢. <u>استكمال بيانات جدول السمبلكس الأمثل.</u>

٣. <u>تفسير المعلومات الموضحة في جدول السمبلكس الأمثل تفسيراً اقتصادياً ومحاسبياً.</u>

٤. <u>تحديد درجة استغلال الموارد المتاحة.</u>

٥. <u>تحديد أسعار ظل الموارد.</u>

٦. <u>المنتجات التي لا يتضمنها الحل الأمثل- والسبب في ذلك.</u>

<u>أولاً: صياغة نموذج البرمجة الخطية لهذه المشكلة في صورته الأساسية.</u>

١- دالة الهدف: تعظيم ر= ٤س$_{١}$ + ٥س$_{٢}$ + ٣ س$_{٣}$

٢- القيود: قيد المادة الخام م: س$_{١}$ + س$_{٢}$ + ٤ س$_{٣}$ ≥ ٦.٠٠٠

قيد المادة الخام ن: س$_{١}$+ ٢س$_{٢}$+ س$_{٣}$ ≥ ٧.٠٠٠

قيد ساعات الآلات: س$_{١}$ +٤س$_{٢}$+ ٢س$_{٣}$ ≥ ١٢.٠٠٠

٣- شرط عدم السالبية: س١، س٢، س٣ ≤ صفر

دالة الهدف = ٤س$_{١}$ + ٥س$_{٢}$ + ٣ س$_{٣}$ + ٠غ$_{١}$ + ٠غ$_{٢}$ + ٠غ$_{٣}$

<u>تحويل متباينات القيود إلى معادلات:</u>

١س$_{١}$ + ١س$_{٢}$ +٤س$_{٣}$ + ١غ$_{١}$ = ٦.٠٠٠

١س$_{١}$ + ٢س$_{٢}$ +١س$_{٣}$ +١غ$_{٢}$ = ٧.٠٠٠

١س$_{١}$ + ٤س$_{٢}$+ ٢س$_{٣}$ +١غ$_{٣}$ = ١٢.٠٠٠

- <u>بفرض أن جميع المتغيرات الأصلية = صفر، والتعويض في معادلات القيود</u>

∴ غ$_{١}$=٦.٠٠٠ ، غ$_{٢}$= ٧.٠٠٠ ، غ$_{٣}$ = ١٢.٠٠٠

<u>ثانياً: استكمال بيانات جدول السمبلكس الأمثل:</u>

ر و			٤	٥	٣	صفر	صفر	صفر
	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	س$_{١}$	س$_{٢}$	س$_{٣}$	غ$_{١}$	غ$_{٢}$	غ$_{٣}$
صفر	غ$_{٣}$	٣.٠٠٠	صفر	صفر	٧	٢	-٣	١
٤	س$_{١}$	٥.٠٠٠	١	صفر	٧	٢	-١	صفر
٥	س$_{٢}$	١.٠٠٠	صفر	١	-٣	-١	١	صفر
اختبار المثالية ص و		٢٥.٠٠٠	٤	٥	١٣	٣	١	صفر
ر و - ص و			صفر	صفر	-١٠	-٣	-١	صفر

- تفسير المعلومات الموضحة في جدول السمبلكس الأمثل تفسيراً اقتصادياً ومحاسبياً:

أ- تحديد كمية الإنتاج من كل منتج، وأقصى ربح ممكن:

- لاحظ أن: كمية الإنتاج تعبر عنها المتغيرات الأصليـــة س: فإذا ظهر أحد المتغيرات الأصلية في عمود متغيرات الحل فإن هذا يعني أنه يجب إنتاج كمية من هذا المنتج تساوي الرقم الموجود في عمود قيم متغيرات الحل أمام المتغير الأصلى.
- أما إذا لم يظهر أحد المتغيرات الأصلية في عمود متغيرات الحل فإن هذا يعني أن هذا المنتج لن يتم إنتاج أية وحدات منه "أي أن كمية الإنتاج من هذا المنتج = صفر.

وبالتطبيق على التمرين من جدول الحل الأمثل، نتبين أن:

الكمية المنتجة من المنتج الأول ($س_١$) = ٥.٠٠٠ وحدة.

الكمية المنتجة من المنتج الثاني ($س_٢$) = ١.٠٠٠ وحدة.

الكمية المنتجة من المنتج الثالث ($س_٣$) = صفر

- لاحظ أن: أقصى ربح ممكن هو الرقم الموجود في صف ص أسفل عمود قيم متغيرات الحل.

وبالتطبيق علي التمرين من جدول الحل الأمثل، نجد أن:

أقصى ربح ممكن = ٢٥.٠٠٠ جنيهاً.

- درجة استغلال الموارد المتاحة (تحديد الطاقات المستغلة والعاطلة):

- المتغيرات الراكدة غ: هي التي تعبر عن الطاقات ومدى استغلالها. فإذا ظهر أحد المتغيرات الراكدة في عمود متغيرات الحل، فإن هذا يعني أن المورد(القيد) الذي يعبر عنه هذا المتغير الراكد، توجد به طاقة عاطلة.
- كمية الطاقة العاطلة = الرقم الموجود في عمود قيم متغيرات الحل أمام المتغير الراكد.

- أما إذا لم يظهر أحد المتغيرات الراكدة في عمود متغيرات الحل، فإن هذا يعني أن المورد (القيد) الذي يعبر عنه هذا المتغير الراكد مُستغل بالكامل؛ أي أنه لا توجد به طاقة عاطلة (طاقته العاطلة = صفر).

وبالتطبيق علي التمرين (من جدول الحل الأمثل)، نجد أن:

$غ_1$= صفر ←∴ المورد الأول مستغل بالكامل.

$غ_2$= صفر ← ∴ المورد الثاني مستغل بالكامل.

$غ_3$= ٣.٠٠٠ ←∴ المورد الثالث به طاقة عاطلة قدرها ٣.٠٠٠ساعة.

- تحديد أسعار ظل الموارد:

(أثر إضافة وحدة واحدة من كل مورد علي أرباح المنشأة):

يلاحظ أن: أسعار الظل هي: الأرقام الموجودة في صف التقييم النهائي (ر- ص) أسفل أعمدة المتغيرات الراكدة بجدول الحل الأمثل للنموذج (مع إهمال الإشارة).

ويقصد بأسعار الظل: مقدار التغير في قيمة الأرباح الإجمالية (دالة الهدف) نتيجة التغير في كمية المورد بوحدة واحدة.

وبالتطبيق علي التمرين من جدول الحل المثل:

المورد الأول: المادة الخام م:

سعر ظل المورد الأول المادة م ← أسفل الراكد $غ_1$= ٣ جنيهات

وهذا يعني أن عائد المساهمة الإجمالي يزيد بمقدار ٣ جنيهات؛ إذا زادت الكمية المتاحة من المادة م بمقدار ١ كيلو، كما أن ذلك يؤدي إلى: (انظر عمود $غ_1$):

زيادة الكمية المنتجة من $س_1$ بمقدار ٢ وحدة

زيادة كمية $غ_3$ ← بمقدار٢، ونقص س٢ بمقدار١ وحدة

ويمكن حساب أثر هذا الإحلال علي عائد المساهمة، على النحو الآتي:

زيادة كمية $س_1$ بمقدار٢ وحدة × ٤ جنيهات = ٨ جنيهات

نقص كمية $س_2$ بمقدار ١ وحدة × ٥ جنيهات = ـ ٥ جنيهات

∴ النتيجة النهائية زيادة في عائد المساهمة + ٣ جنيهات

<u>المورد الثانى: المادة الخام ن:</u>

سعر ظل المورد الثاني (المادة الخام ن) أسفل الراكد غ$_٢$ = ١جنيهاً وهذا يعنـى: أن عائـد المسـاهمة الإجمـالي يزيـد بمقـدار ١ جنيهـاً؛ إذا زادت الكميـة المتاحة من المادة م بمقدار ١ كيلو، كما أن ذلك يؤدي إلى: (انظر عمود غ$_٢$):

نقص كمية غ$_٣$ بمقدار ←—— ٣ ساعات.

نقص الكمية المنتجة من س$_١$ بمقدار←——١ وحدة.

زيادة الكمية المنتجة من س$_٢$ بمقدار←——١ وحدة.

ويمكن حساب أثر هذا الإحلال علي عائد المساهمة:

نقص كمية س$_١$ بمقدار ١ وحدة × ٤ جنيهات = (ـ) ٤ جنيهات

زيادة كمية س$_٢$ بمقدار١ وحدة × ٥ جنيهات = + ٥ جنيهات

∴ النتيجة النهائية زيادة في عائد المساهمة + ١ جنيهاً

<u>المورد الثالث: ساعات الآلات:</u>

سعر ظل المورد الثالث: ساعات الآلات: أسفل الراكد غ$_٣$ = صفر

*** وهـذا يعنـي: أن عائـد المسـاهمة الإجمـالي لـن يتـأثر، إذا زادت الكميـة المتاحة من ساعات تشغيل الآلات بمقدار ١ ساعة ؛ وذلك بسبب أنه يوجد بها كمية فائضة غير مستخدمة (تمثل طاقة عاطلة) (أنظر عمود المتغير غ$_٣$).**

- **<u>المنتجات التي لا يتضمنها الحل الأمثل- والسبب في ذلك:</u>**

يمكن حساب أو تحديد خسارة الفرصة البديلة للمنتجات التي لم تـدخل فـي الحل الأمثل؛ وكذلك عائد المساهمة الذي يجب أن يحققه كل منـتج لـيس ضـمن الحل الأمثل حتى يكون إدخاله في الحل مربحاً، وذلك على النحو الآتي:

<u>يلاحظ هنا أن:</u>

المنتجات التي لا يتضمنها الحل ←——هو المنتج س$_٣$

وسبب ذلك أنـه: لا يتم إنتـاج أيـة وحدات من المنـتج س$_٣$، وذلـك لأن كل وحدة يتم إنتاجها من هذا المنـتج يترتـب عليهـا تحمـل المنشـأة لخسـارة فرصـة بديلة قدرها ١٠ جنيهات.

- **يلاحظ أن: خسارة الفرصة البديلة تتمثل في: الأرقام الموجودة في صف التقييم النهائي ($ر_و$ – $ص_و$) أسفل أعمدة المتغيرات الأصلية بجدول الحل الأمثل للنموذج (مع إهمال الإشارة).**
- **ويقصد بخسارة الفرصة البديلة: مقدار الخسارة التي تتحملها المنشأة نتيجة إنتاج وحدة واحدة من المنتج.**

- **حساب خسارة الفرصة البديلة للمنتجات التي لم تدخل الحل:**

يتم حساب خسارة الفرصة البديلة للمنتجات التي لم تدخل في الحل الأمثل كما يلي:

عائد مساهمة الوحدة من المنتج $س_٣$ ⟸ ٣ جنيهات

يطرح منه:

قيمة الموارد المستخدمة في إنتاج وحدة واحدة من $س_٣$

مقومة بأسعار الظل (الاحتياج من الموارد × سعر ظل الموارد)

من المادة الخام م: ٤ كيلو ×٣ = ١٢

من المادة الخام ن: ١ كيلو × ١ = ١

من ساعات الآلات: ٢ ساعة × صفر = صفر(∴الإجمالي=١٣ جنيهاً)

∴ خسارة الفرصة البديلة للمنتج $س_٣$ = (– ١٠)

عائد المساهمة الذي يجب أن تحققه الوحدة من المنتج غير الداخل في الحل؛ حتى يكون إدخاله في الحل مربحاً=

= [قيمة الموارد المستخدمة في إنتاجه مقومة بأسعار الظل].

أو = [هامش مساهمته الحالي + خسارة فرصته البديلة].

∴ عائد المساهمة الذي يجب أن تحققه الوحدة من المنتج $س_٣$ حتى يكون إدخاله في الحل مربحاً =

= قيمة الموارد المستخدمة في إنتاجه مقومة بأسعار الظل= ١٣ج

أو هامش مساهمته الحالي ٣ + خسارة فرصته البديلة ١٠ = ١٣ج

- **إنتاج منتج جديد:**
- **إذا رغبت المنشأة في إضافة منتج جديد، تحقق الوحدة منه عائد مساهمة قدره ١٠ جنيهات، ويتطلب إنتاج الوحدة منه: ٣ كيلو من المادة الخام م ؛ و٣ كيلو من المادة الخـــام ن ؛ و ٤ ساعات من ساعات تشغيل الآلات؛ هل تنصح بإدخال هذا المنتج؟ ولماذا؟**

من أجل تحديد هل من الأفضل قبول أو رفض إضافة منتج جديد، يجب القيام بتحديد صافي ربح أو خسارة هذا المنتج...

ويتم تحديد صافي ربح أو خسارة المنتج الجديد كما يلي:

صافي ربح أو خسارة المنتج الجديد =

هامش مساهمة الوحدة من المنتج الجديد	(–)	قيمة الموارد المستخدمة فى إنتاج وحدة من هذا المنتج مقومة بأسعار الظل

∴ هامش مساهمة الوحدة من المنتج الجديد: ١٠ جنيهات

يطرح منه: قيمة الموارد المستخدمة في إنتاج وحدة واحدة من المنتج مقومة بأسعار الظل:

الاحتياج من الموارد × سعر ظل المورد

من المادة م:	**٣ × ٣**	**= ٩جنيهات**
من المادة ن:	**٣ × ١**	**= ٣ جنيهات**
من ساعات الآلات:	**٤ × صفر**	**= صفر**

الإجمالي ١٢ جنيهاً

∴ خسارة فرصته البديلة= (– ٢ جنيهاً).

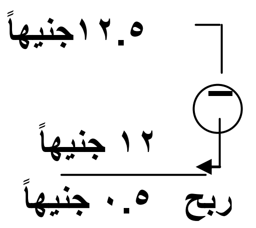
∴ لا ننصح بإضافة هذا المنتج؛ حيث أن إضافة هذا المنتج يترتب عليه تحمل المنشأة خسارة فرصة بديلة قدرها ٢ جنيهاً عن كل وحدة يتم إنتاجها.

- **بفرض أن هامش مساهمة الوحدة من المنتج الجديد ١٢.٥ جنيهاً؛ فهل تنصح في هذه الحالة بإضافة المنتج الجديد؟**

هامش مساهمة الوحدة من المنتج الجديد ١٢.٥ جنيهاً

يطرح منه:

قيمة الموارد المستخدمة فى إنتاج وحدة واحدة من المنتج مقومة بأسعار الظل (كما سبق حسابها) ١٢ جنيهاً



∴ ننصح في هذه الحالة بإضافة المنتج الجديد؛ طالما أن إضافته يترتب عليها تحقيق ربح قدره ٠.٥ جنيهاً عن كل وحدة يتم إنتاجها.

- **بفرض أن هامش مساهمة الوحدة من المنتج الجديد ١٢ جنيهاً فهل ننصح في هذه الحالة بإضافة المنتج الجديد؟**

∵ هامش مساهمة الوحدة من المنتج ←—— ١٢ جنيهاً

يطرح منه: (–)

قيمة الموارد المستخدمة فى إنتاج وحدة واحدة من المنتج مقومة بأسعار الظل كما سبق حسابها). ١٢

= صفر

∴ ننصح بإضافة المنتج الجديد طالما أن قيمة الموارد المستخدمة في إنتاج وحدة واحدة منه = هامش مساهمة الوحدة منه.

تمرين رقم (٢):

تقوم إحدى المنشآت الصناعية، بإنتاج منتجين أ، ب ؛ وتستلزم العملية الإنتاجية ضرورة استخدام ثلاثة موارد إنتاجية؛ ويبين الجدول الآتي الاحتياجات اللازمة لإنتاج كل منتج والطاقة المتاحة من كل مورد:

المرحلة الإنتاجية	الساعات اللازمة		الطاقة المتاحة
	المنتج أ	المنتج ب	
مورد الآلات	٤	٦	٣٠٠٠ ساعة
ساعات العمل المباشر	٦	٤	٣٠٠٠ ساعة
الخامات	٢	٢	٦٠٠٠ كيلو جرام

كما يبين الجدول الآتي، بيانات أسعار بيع، وتكاليف إنتاج كل منتج:

بيان	المنتج أ	المنتج ب
سعر بيع الوحدة	٢٧٠	٣٢٠
التكلفة المتغيرة الصناعية للوحدة	١٣٠	١٨٠
التكلفة المتغيرة التسويقية للوحدة	١٠٠	١٣٠
التكلفة الثابتة الصناعية للوحدة	٣٥	٤٧
التكلفة الثابتة التسويقية للوحدة	٤٣	٢٧
التكلفة الإدارية والعمومية الثابتة للوحدة	٢١	١٧

والمطلوب: استخدام طريقة السمبلكس في تحديد كل من:

١- كمية الإنتاج المثلى من كل منتج، وأقصي ربح ممكن.

٢- الوقت العاطل أو الطاقة غير المستغلة من كل مورد.

٣- تكلفة الموارد المستخدمة في الإنتاج.

تمرين رقم (٣):

تنتج إحدى المنشآت ثلاثة منتجات: أ؛ ب؛ جـ؛ يحقق كل منها عائد مساهمة للوحدة قدره: ٢، ٤، ٥.٠ جنيهاً علي الترتيب، والآتي بياناً يوضح احتياجات الوحدة من كل منتج من كلٍ من: المواد الخام؛ وساعات الطاقة؛ والكميات المتاحة من هذه الموارد:

الموارد	احتياج وحدة المنتج من الموارد			المتاح من الموارد
	أ	ب	جـ	
مادة خام م	٤	٢	ــــ	١٠٠
مادة خام ن	٢	١	١	١٠٠
ساعات الآلات	١	٣	١	١٠٠

وقد استخدمت المشأة المذكورة نموذج البرمجة الخطية، لتحديد خليط الإنتاج الأمثل الذي يحقق أقصى ربح ممكن؛ وفيما يلي جدول السمبلكس الأمثل:

ر و			٢	٤	٠.٥	صفر	صفر	صفر
	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	س١	س٢	س٣	غ١	غ٢	غ٣
٢	س١	١٠	١	صفر	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	صفر	$-\frac{1}{5}$
صفر	غ٢	٥٠	صفر	صفر	١	$-\frac{1}{2}$	١	٠
٤	س٢	٣٠	صفر	١	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{10}$	صفر	$\frac{2}{5}$
اختبار المثالية ص و								
ر و – ص و								

حيث تمثل س١، س٢، س٣ الكميات الواجب إنتاجها من كل منتج، كما تمثل غ١، غ٢، غ٣ المتغيرات الراكدة المرتبطة بقيود المادة الخام وساعات تشغيل الآلات.

والمطلوب:

١. **صياغة نموذج البرمجة الخطية لهذه المشكلة في صورته الأساسية.**
٢. **استكمال بيانات جدول السمبلكس الأمثل.**
٣. **تفسير المعلومات الموضحة في جدول السمبلكس الأمثل تفسيراً اقتصادياً ومحاسبياً.**
٤. **تحديد درجة استغلال الموارد المتاحة.**
٥. **تحديد أسعار ظل الموارد.**
٦. **المنتجات التى لا يتضمنها الحل الأمثل- والسبب في ذلك.**

تمرين رقم (٤):

الآتي جدول السمبلكس الأول والمبدئي، لإحدى مشاكل البرمجة الخطية، لتحديد المزيج الإنتاجي الأمثل، بهدف تعظيم ربحية المنشأة؛ والمطلوب: اختبار مثالية الجدول الأول، ومحاولة التوصل إلى جدول الحل الأمثل (إن أمكن):

ر$_و$			٢	صفر	$\frac{3}{2}$	صفر	صفر	صفر
	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	س$_١$	س$_٢$	س$_٣$	غ$_١$	غ$_٢$	غ$_٣$
صفر	غ$_١$	٢	١	ـ ١	صفر	١	صفر	صفر
صفر	غ$_٢$	٤	٢	صفر	١	صفر	١	صفر
صفر	غ$_٣$	٣	١	١	١	صفر	صفر	١
اختبار المثالية ص$_و$		صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
ر$_و$ ـ ص$_و$			٢	صفر	$\frac{3}{2}$	صفر	صفر	صفر

أو

تمرين رقم (٥):

المطلوب تعظيم الدالة الآتية:

ر = ١٠ س$_١$ + ٨ س$_٢$

وذلك، في ظل القيود الآتية:

٥ س$_١$ + ٣ س$_٢$ = ٧٤

٤ س$_١$ + ٢ س$_٢$ ≥ ٦٠

س$_١$ ≤ ١٠

س$_١$، س$_٢$ ≤ صفر

الفصل الثالث
الطريقة العامة لحل نموذج البرمجة الخطية
حالة تدنية (تخفيض) التكاليف

تمرين رقم (١):

تقوم منشأة التوفيق لصناعة الأثاثات المكتبية، بإنتاج نوعين من المنتجات س، ص، وذلك باستخدام ثلاث أنواع من المواد الخام: أ، ب، جـ؛ ويظهر الجدول الآتي احتياجات كل منتج من كل نوع من أنواع الخامات، والحد الأدنى للاحتياجات المطلوبة من كل نوع من المواد الخام، وذلك كالآتي:

الخامات	المنتجات		أدنى حد من الاحتياجات
	س	ص	
أ	٤	٥	٢٠
ب	١٢	٣	٣٠
جـ	٣	٢	١٢

وتبلغ تكلفة الوحدة من المنتج س: ٣ جنيهات، ومن المنتج ص: ٢جنيهاً.

والمطلوب:التوصل إلى الحل الامثل الذي يعمل على تدنية أو تخفيض التكاليف إلى أدنى حد ممكن، وذلك مستخدماً طريقة السمبلكس.

الإجابة

- **صياغة نموذج البرمجة الخطية لتدنية التكاليف:**
  - **دالة الهدف:**

المطلوب تخفيض (تدنية) الدالة ت = ٣$س_١$ + ٢$س_٢$

  - **وذلك طبقا للقيود الآتية:**

٤$س_١$ + ٥$س_٢$ $\geq$ ٢٠

١٢$س_١$ + ٣$س_٢$ $\geq$ ٣٠

٣$س_١$ + ٢$س_٢$ $\geq$ ١٢

  - **وذلك طبقاً لشرط عدم السالبية:**

$س_١$، $س_٢$ $\geq$ صفر

تحويل المتباينات إلي معادلات:

يتم تحويل المتباينات التي من النوع "أكبر من أو يساوي" ≤ إلي معادلات؛ عن طريق اضافة متغيرات راكدة بإشارة سالبة، ولها معامل تكلفة = صفر؛ ثم اضافة متغيرات اصطناعية بإشارة موجبة، ولها معامل تكلفة متناهي في الكبر (م) ؛ وعادة ما تأخذ الرموز ر١، ر٢....ر ن لتميزها عن كلٍ من: المتغيرات الأصلية، والمتغيرات الراكدة، حيث يظهر ذلك على النحو الآتي:

٤س١ + ٥س٢ − غ١ + ر١ = ٢٠

١٢س١ + ٣س٢ − غ٢ + ر٢ = ٣٠

٣س١ + ٢س٢ − غ٣ + ر٣ = ١٢

جدول الحل المبدئي:

يظهر جدول السمبلكس الأول كالآتي:

ت و			٣	٢	صفر	صفر	صفر
	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	س١	س٢	غ١	غ٢	غ٣
م	ر ١	٢٠	٤	٥	ـ ١	صفر	صفر
م	ر ٢	٣٠	١٢	٣	صفر	ـ ١	صفر ⇦
م	ر ٣	١٢	٣	٢	صفر	صفر	ـ ١
اختبار المثالية ص و		٦٢ م	١٩ م	١٠ م	ـ م	ـ م	ـ م
ت و ـ ص و			٣ ـ ١٩ م ⇧	٢ ـ ١٠ م	م	م	م

قواعد إعداد جداول السمبلكس:

يوضح الجدول المبين أعلاه (الحل المبدئي): أنه يحقق تكلفة مغالى فيها تبلغ (٦٢م)، كما يتبين من قيم معاملات المتغيرات في صف التقييم النهائي (ر و ـ ص و)، أنها معاملات سالبة، وهذا يعني أن الحل السابق لا يمثل الحل الامثل، ومن ثم فلابد من تحسين الحل، بالانتقال إلى حل آخر أفضل منه على النحو الآتي:

١- يظهر تحت عمود المتغير س$_{١}$ أكبر قيمة سالبة في صف (ر $_{و}$ – ص $_{و}$)؛ وعلى ذلك فإن عمود س$_{١}$ يعتبر هو عمود المفتاح.

٢- يتم اختبار الصفوف لتحديد المتغير الخارج الذى يحل س$_{١}$ محله وذلك على النحو الآتي:

صف ر$_{١}$ = ٢٠ ÷ ٤ = ٥

صف ر$_{٢}$ = ٣٠ ÷ ١٢ = $\frac{5}{2}$ (وهي هنا تمثل أصغر قيمة موجبة)

صف ر$_{٣}$ = ١٢ ÷ ٣ = ٤

وعلي ذلك فإن صف ر$_{٢}$ يعتبر هو صف المفتاح، لأنه يمثل أصغر قيمة موجبة.

٣- رقم المفتاح هو (١٢)

٤- تعديل الصفوف:

أولاً: تعديل صف المفتاح وذلك عن طريق: قسمة الأرقام الظاهرة فيه ÷ رقم المفتاح ١٢، حيث يظهر ذلك على النحو الآتي:

[١ $\frac{5}{2}$ صفر $\frac{1}{4}$ صفر]$\frac{1}{12}$

ثانياً: تعديل صف ر$_{١}$ وفقاً للقاعدة السابق توضيحها (في نموذج البرمجة حالة تعظيم الربحية) مع ملاحظة أن المعدل الثابت= $\frac{1}{3}$

القاعدة التى تتبع في تعديل الصفوف الأخرى، تقوم على الأساس الآتي:

الرقم الجديد= الرقم في الصف القديم – [(الرقم المناظر في صف المفتاح)×معدل ثابت]

حيث أن: المعدل الثابت = $\frac{\text{الرقم القديم فى عمود المفتاح}}{\text{رقم المفتاح}}$

٢٠ – ٣٠ × $\frac{1}{3}$ = ١٠

٤ – ١٢ × $\frac{1}{3}$ = صفر

٥ – ٣ × $\frac{1}{3}$ = ٤

–١ – صفر × $\frac{1}{3}$ = – ١

صفر – (-١) × $\frac{1}{3}$ = $\frac{1}{3}$

صفر – صفر × $\frac{1}{3}$ = صفر

ثالثاً: تعديل صف ر٣ مع ملاحظة أن المعدل الثابت= $\frac{1}{4}$

١٢ – ٣٠ × $\frac{1}{4}$ = $\frac{18}{4}$

٣ – ١٢ × $\frac{1}{4}$ = صفر

٢ – ٣ × $\frac{1}{4}$ = $\frac{5}{4}$

صفر – صفر × $\frac{1}{4}$ = صفر

صفر – (-١) × $\frac{1}{4}$ = $\frac{1}{4}$

-١ – صفر × $\frac{1}{4}$ = -١

ومن ثم فإن جدول السمبلكس الثاني سيظهر على النحو الآتي:

ت و	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	٣ س١	٢ س٢	صفر غ١	صفر غ٢	صفر غ٣
م	ر١	١٠	صفر	٤	-١	$\frac{1}{3}$	صفر
٣	س١	$\frac{5}{2}$	١	$\frac{1}{4}$	صفر	$-\frac{1}{12}$	صفر
م	ر٣	$\frac{18}{4}$	صفر	$\frac{5}{4}$	صفر	$\frac{1}{4}$	-١
اختبار المثالية ص و		$\frac{15}{2}+\frac{29}{2}$م	٣	$\frac{3}{4}+\frac{21}{4}$م	-م	$-\frac{1}{4}+\frac{7}{12}$م	-م
ت و - ص و			صفر	$\frac{5}{4}-\frac{21}{4}$م	م	$\frac{1}{4}-\frac{7}{12}$م	م

هذا وقد تم حساب أدنى تكلفة [صف ص و] كالآتى:

١- أدنى تكلفة = ١٠م + $\frac{15}{2}$ + $\frac{18}{4}$م = $\frac{15}{2}$ + $\frac{29}{2}$م

هذا وقد تم حساب الأرقام الظاهرة في صف (ت $_{و}$ ـ ص $_{و}$) كالآتي:

١- **عمود $س_١$ = ٣ـ (م × صفر + ٣×١ + م× صفر) = صفر**

٢- **عمود $س_٢$ = ٢ـ (٤م + $\frac{3}{4}$+ $\frac{5}{4}$م) = $\frac{5}{4}$ ـ $\frac{21}{4}$م**

٣- **عمود غ $_١$ = صفر – (ـ م + صفر + صفر) = م**

٤- **عمود غ $_٢$= صفر – ($\frac{1}{3}$م ـ $\frac{1}{4}$ + $\frac{1}{4}$م) = $\frac{1}{4}-\frac{7}{12}$م**

٥- **عمود غ $_٣$ = صفر – (صفر + صفر – م) = م**

- **تحسين الحل:**

١- **يلاحظ أن عمود $س_٢$ يمثل عمود المفتاح، وذلك نظراً لأن لـه أكبر قيمة سالبة تساهم في تخفيض التكاليف.**

٢- **يتم اختبار الصفوف بهدف تحديد المتغير الخارج، والذي يحل $س_٢$ محله كالآتي:**

صف $ر_١$ = ١٠ ÷ ٤ = $\frac{5}{2}$ (وهي تمثل هنا أصغر قيمة موجبة)

صف $س_١$ = $\frac{5}{2} \div \frac{1}{4} = 10$

صف $ر_٣$ = $\frac{18}{4} \div \frac{5}{4} = \frac{18}{5}$

ومن ثم فإن صف $ر_١$ يمثل صف المفتاح، لأن له أصغر قيمة موجبة.

٣- **رقم المفتاح هو (٤)**

٤- **تعديل الصفوف:**

أ. **تعديل صف المفتاح بقسمة الأرقام الظاهرة فيـه ÷ ٤، حيث يظهر على النحو الآتي:**

$\frac{5}{2}$ صفر ١ $-\frac{1}{4}$ $\frac{1}{12}$ صفر

ب. تعديل الصفوف:

<u>تعديل صف $س_1$</u> مع ملاحظة أن المعدل الثابت $\frac{1}{16}$

$$\frac{5}{2} - 10 \times \frac{1}{16} = \frac{30}{16}$$

١ ـ صفر $\times \frac{1}{16} = 1$

$\frac{1}{4}$ **ـ ٤ ×** $\frac{1}{16}$ **= صفر**

صفر – (-١) × $\frac{1}{16} = \frac{1}{16}$

$$-\frac{1}{12} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{16} = -\frac{5}{48}$$

صفر – صفر × $\frac{1}{16}$ **= صفر**

<u>تعديل صف $ر_3$</u> مع ملاحظة أن المعدل الثابت = $\frac{5}{16}$

$$\frac{18}{4} - 10 \times \frac{5}{16} = \frac{22}{16}$$

صفر – صفر × $\frac{5}{16}$ **= صفر**

$\frac{5}{4} - 4 \times \frac{5}{16} =$ **صفر**

صفر – (ـ١) × $\frac{5}{16} = \frac{5}{16}$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \times \frac{5}{16} = \frac{7}{48}$$

ـ١ – صفر $\times \frac{5}{16} = -1$

ويظهر جدول السمبلكس الثالث كالآتي:

ت و	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	٣ س١	٢ س٢	صفر غ١	صفر غ٢	صفر غ٣
٢	س٢	$\frac{5}{2}$	صفر	١	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	صفر
٣	س١	$\frac{30}{16}$	١	صفر	$\frac{1}{16}$	$-\frac{5}{48}$	صفر
م	ر٣	$\frac{22}{16}$	صفر	صفر	$\frac{5}{16}$ (محوطة بدائرة)	$\frac{7}{48}$	١-
اختبار المثالية ص و		$\frac{170}{16}+\frac{22}{16}م$	٣	٢	$\frac{-5}{16}+\frac{5}{16}م$	$\frac{-23}{48}+\frac{7}{48}م$	- م
ت و ـ ص و			صفر	صفر	$\frac{5}{16}-\frac{5}{16}م$	$\frac{23}{48}-\frac{7}{48}م$	م

<u>وقد تم حساب أدنى تكلفة (ص و) كالآتي:</u>

أدنى تكلفة = $(\frac{5}{2}\times 2+\frac{30}{16}\times 3+\frac{22}{16}\times م)=\frac{170}{16}+\frac{22}{16}م$

<u>وقد تم حساب أرقام صف (ت و ـ ص و) كالآتي:</u>

١- عمود س١ =٣ـ (٢× صفر + ٣ × ١ + م × صفر) = صفر

٢- عمود س٢ =٢ـ (٢× ١ + ٣ × صفر + م × صفر) = صفر

٣- عمود غ١ =

صفر - $(-\frac{1}{4}\times 2+\frac{1}{16}\times 3+\frac{5}{16}م)=\frac{5}{16}-\frac{5}{16}م$

٤- عمود غ٢ =

صفر - $(\frac{1}{12}\times 2+(-\frac{5}{48})\times 3+\frac{7}{48}\times م)=\frac{23}{48}-\frac{7}{48}م$

٥- عمود غ٣ = صفر ـ (٢× صفر + ٣ × صفر + (م× ـ ١)= م

- **تحسين الحل:**

يتبين من معاملات المتغيرات كما تظهر في صف التقييم النهائي: أنه لا يزال هناك معاملات سالبة يمكن أن تساهم في تخفيض التكاليف، ويتحدد اقتراح حل آخر أفضل من السابق كالآتي:

١- عمود س٣ هو عمود المفتاح؛ حيث أن له أكبر قيمة سالبة.

٢- اختبار الصفوف لتحديد المتغير الخارج الذى يحل س٣ محله يتم على النحو الآتي:

صف س٢ = $\frac{5}{2} \div -\frac{1}{4} = -10$

صف س١ = $\frac{30}{16} \div \frac{1}{16} = 30$

صف س٣ = $\frac{22}{16} \div \frac{5}{16} = \frac{22}{5}$ **(وهي تمثل أصغر قيمة موجبة).**

وبذلك يكون صف ر٣ هو صف المفتاح، حيث أنه ذو أصغر قيمة موجبة.

٣- رقم المفتاح هو $\frac{5}{16}$

٤- تعديل الصفوف

أ – تعديل صف المفتاح بقسمة الأرقام الظاهرة فيه على رقم المفتاح:

$\frac{22}{5}$ **صفر صفر ١** $\frac{7}{15}$ **-** $\frac{16}{5}$

ب- تعديل الصفوف:

تعديل صف س٢ مع ملاحظة أن المعدل الثابت = $\frac{4}{5}$

$$\frac{5}{2} - \frac{22}{16} \times \frac{4}{5} = \frac{18}{5}$$

صفر – صفر × $-\frac{4}{5}$ **= صفر**

١ـ صفر × ـ $\frac{4}{5}$ = ١

$-\frac{1}{4}-\frac{5}{16}\times-\frac{4}{5}=$ صفر

$\frac{1}{12}-\frac{7}{48}\times-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$

صفر ـ (ـ١) × ـ $\frac{4}{5}$ = ـ $\frac{4}{5}$

__تعديل صف س١__ مع ملاحظة أن المعدل الثابت $\frac{1}{5}$

$\frac{30}{16}-\frac{22}{16}\times\frac{1}{5}=\frac{8}{5}$

١ـ صفر × $\frac{1}{5}$ = ١

صفر ـ صفر × $\frac{1}{5}$ = صفر

$\frac{1}{16}-\frac{5}{16}\times\frac{1}{5}=$ صفر

$-\frac{5}{48}-\frac{7}{48}\times\frac{1}{5}=-\frac{4}{15}$

صفر ـ (ـ ١) × $\frac{1}{5}$ = $\frac{1}{5}$

__ويظهر جدول السمبلكس الرابع كالآتي:__

$ت_و$	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	٣ س١	٢ س٢	صفر غ١	صفر غ٢	صفر غ٣
٢	س٢	$\frac{8}{15}$	صفر	١	صفر	$\frac{1}{5}$	$-\frac{4}{5}$
٣	س١	$\frac{8}{5}$	١	صفر	صفر	$-\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$
صفر	س١	$\frac{22}{5}$	صفر	صفر	١	$\frac{7}{15}$	$-\frac{16}{5}$
اختبار المثالية $ص_و$ ١٢			٣	٢	صفر	صفر	ـ ١
($ت_و$ ـ $ص_و$)			صفر	صفر	صفر	صفر	١

وقد تم حساب أدنى تكلفة (ص و) كالآتي:

أدنى تكلفة = ($\frac{18}{5}$ × ٢ + $\frac{8}{5}$ × ٣ + $\frac{22}{5}$ × صفر) = ١٢

وقد تم حساب أرقام صف (ت و ـ ص و) كالآتي:

١- عمود س١ = ٣ـ (٢ × صفر + ٣×١ + صفر× صفر) = صفر

٢- عمود س٢ = ٢ـ (٢× ١ + ٣× صفر + صفر× صفر) = صفر

٣- عمود غ١ = صفر – (٢ × صفر + ٣ × صفر + صفر × ١) = صفر

٥- عمود غ٢ = صفر – ($\frac{1}{5}$ × ٢ + ($\frac{-2}{15}$) × ٣ + $\frac{7}{15}$ × صفر) = صفر

٥- عمود غ٣ = صفر – (($\frac{-4}{5}$) × ٢ + $\frac{1}{5}$ × ٣ + ($\frac{-16}{5}$) × صفر) =١

- **تفسيرالحل الأمثل:**

يتبين من قيم معاملات المتغيرات والظاهـرة في صف التقييم النهائي (ت و ـ ص و) في جدول السمبلكس الرابع، أنها أصبحت كلها إما قيماً موجبة أو صفرية، ولا توجد أية قيم سالبة، ومن ثم فإنه لا توجد هناك أية إمكانية لتخفيض التكاليف إلى أكثر من ذلك؛ ونلاحظ هنا أن أية محاولة لتعديل الحل بإضافة وحدة من أحد المتغيرات، لن يؤثر علي التكاليف – بالنسبة للمعاملات الصفرية – بل قد يؤدي إلي زيادة التكاليف – بالنسبة للمعاملات الموجبة، وعلى ذلك فإن جدول السمبلكس الرابع يعتبر بمثابة الحل الأمثل للمشكلة؛ والذي يتحدد كالأتي:

س١ = $\frac{8}{5}$ وحدة

س٢ = $\frac{18}{5}$ وحدة

غ ١ = $\frac{22}{5}$

غ٢ = صفر

غ٣ = صفر

كما أن أدنى تكلفة للإنتاج هي: ١٢ جنيهاً.

ويكون مقدار الخامات الداخلة في وحدة المنتج كالآتي:

المادة الخام أ = $\frac{8}{5}$ **× ٤ +** $\frac{18}{5}$ **× ٥ =** $\frac{122}{5}$

والمتغير الراكد غ ١ يمثل زيادة المادة الخام أ عن الحد الأدنى المقرر

$= \frac{122}{5} - 20 = \frac{22}{5}$

المادة الخام ب = $\frac{8}{5} \times 12 + \frac{18}{5} \times 3 = \frac{96}{5} + \frac{54}{5} = \frac{150}{5} = 30$

ونلاحظ هنا أنها تحقق الحد الأدنى للاحتياجات المطلوبة.

المادة الخام جـ = $\frac{8}{5} \times 3 + \frac{18}{5} \times 2 = \frac{24}{5} + \frac{36}{5} = \frac{60}{5} = 12$

ونلاحظ هنا أنها تحقق الحد الأدنى للاحتياجات المطلوبة.

تمرين(٢):

تنتج منشأة القدس الشريف الصناعية منتجاً مُكَوَّنَاً من ثلاثة أنواع من المواد الخام هي: (أ)، (ب)، (ج)؛ وتقوم المنشأة حالياً بإنتاج طلبية للتصدير للخارج، وهي عبارة عن ١٠.٠٠٠ وحدة من هذا المنتج؛ إلا أن طلب التصدير هذا يقوم على عدة اشتراطات يجب الوفاء بها، وهي:

١- ألا يزيد المستخدم من المادة الخام (أ) عن ٣٠٠٠ كيلوجرام.

٢- وجوب استخدام ١٥٠٠ كيلو جرام على الأقل من المادة الخام (ب).

٣- وجوب استخدام ٢٠٠٠ كيلو جرام على الأقل من المادة الخام (ج).

هذا، وتبلغ تكلفة الكيلو من المادة الخام أ: ٨ جنيهات، ومن المادة الخام ب: ١٠ جنيهات، ومن المادة الخام ج: ١١ جنيهاً.

والمطلوب: استخدام طريقة السمبلكس، في تحديد الكمية المثلى من كل مادة خام، والتي تؤدي إلى تدنية (تخفيض) التكلفة إلى أدنى حد ممكن.

تمرين رقم (٣):

تقوم منشأة طيبة الصناعية، بإنتاج طلبية لأحد عملائها، حيث تتكون هذه الطلبية من ١٠٠٠ كيلو جرام من خليط من ثلاثة أصناف من المواد الخام (أ)، (ب)، (ج) ؛ وتبلغ تكلفة الكيلو جرام من هذه الخامات على النحو الآتي: ٥ جنيهات، ٦ جنيهات، ٧ جنيهات، علي الترتيب. هذا وتتطلب مواصفات إنتاج هذه الطلبية: عدم إمكانية استخدام أكثر من ٣٠٠ كيلو جرام من الصنف (أ)؛ مع وجوب استخدام ١٥٠ كيلو جرام علي الأقل من الصنف (ب)؛ وكذلك وجوب استخدام ٢٠٠ كيلو جرام علي الأقل من الصنف (ج).

والمطلوب : تقديم استشارتك المحاسبية اللازمة، لإدارة المنشأة المذكورة، بشأن تحديد الكمية اللازمة من كل صنف من المواد الخام، بحيث تنخفض التكلفة إلى أدنى حد ممكن.

الفصل الرابع
المشكلة الثنائية في البرمجة الخطية

تمرين رقم (١):

الآتي نموذج البرمجة الخطية لإحدى مشكلات منشأة التيسير الصناعية:

تعظيم أرباح = ٢٤٠ س١ + ٣٦٠ س٢ + ٤٨٠ س٣

طبقا للقيود الآتية:

٣ س١ + ٤ س٢ + ٢ س٣ ≥ ٦٠٠

٢ س١ + س٢ + ٢ س٣ ≥ ٩٠٠

١ س١ + ٣ س٢ + ٢ س٣ ≥ ١٢٠٠

وذلك طبقا لشرط عدم السالبية:

س١ ؛ س٢ ؛ س٣ ≤ صفر

والمطلوب: إعداد النموذج الثنائي للنموذج الأصلي المبين أعلاه.

الإجابـــــــة

تدنية تكاليف: ٦٠٠ ص١ + ٩٠٠ ص٢ + ١٢٠٠ ص٣

طبقا للقيود الآتية:

٣ ص١ + ٢ ص٢ + ص٣ ≤ ٢٤٠

٤ ص١ + ص٢ + ٣ص٣ ≤ ٣٦٠

٢ ص١ + ٢ ص٢ + ٢ ص٣ ≤ ٤٨٠

وذلك طبقاً لشرط عدم السالبية:

ص١ + ص٢ + ص٣ ≤ صفر

تمرين رقم (٢):

الآتي نموذج البرمجة الخطية لمشكلة تخصيص موارد لمنشأة التوفيق الصناعية: تعظيم أرباح = ٣٠٠ س١ + ٦٠٠ س٢ + ٩٠٠ س٣

طبقا للقيود الآتية:

٣ س١ + ٤ س٢ + ٥ س٣ ≥ ٦٠

٢ س$_{١}$ + س$_{٢}$ + ٢ س$_{٣}$ ≥ ٤٠

٦ س$_{١}$ + ٧ س$_{٢}$ + ٨ س$_{٣}$ ≥ ٨٠

وطبقا لشرط عدم السالبية فإن:

س$_{١}$ + س$_{٢}$ + س$_{٣}$ ≤ صفر

والمطلوب: استنتاج النموذج الثنائي له.

الإجابـــــــــة

يمكن استنتاج وإعداد النموذج الثنائي على النحو الآتي:

دالة الهدف: المطلوب تخفيض الدالة الآتية:

ت$_{و}$ = ٦٠ ص$_{١}$ + ٤٠ ص$_{٢}$ + ٨٠ ص$_{٣}$

طبقا للقيود الآتية:

٣ ص$_{١}$ + ٢ ص$_{٢}$ + ٦ ص$_{٣}$ ≤ ٣٠٠

٤ ص$_{١}$ + ص$_{٢}$ + ٧ ص$_{٣}$ ≤ ٦٠٠

٥ ص$_{١}$ + ٢ ص$_{٢}$ + ٨ ص$_{٣}$ ≤ ٩٠٠

وطبقا لشرط عدم السالبية فإن:

ص$_{١}$ ؛ ص$_{٢}$ ؛ ص$_{٣}$ ≤ صفر

تمرين رقم (٣):

تنتج منشأة البشائر الصناعية منتجين: س ، ص ، وذلك من خلال ٣ مراحل إنتاجية؛ وقد تم صياغة نموذج البرمجة الخطية الأصلي للمشكلة على النحو الآتي:

المطلوب تعظيم الدالة ر$_{و}$ = ٦ س$_{١}$ + ١٠ س$_{٢}$

وذلك في ظل القيود:

٦ س$_{١}$ + ٤ س$_{٢}$ ≥ ٣٦

٢ س$_{١}$ ≥ ٨

٢ س$_{٢}$ ≥ ١٢

وذلك بشرط أن: س$_{١}$ ؛ س$_{٢}$ ≤ صفر

والمطلوب:

١. حل المشكلة الأصلية.

٢. حل المشكلة الثنائية.

٣. مطابقة الحلول، والنتائج.

الإجابـــــة

أولاً: حل المشكلة الأصلية:

من خلال اتباع قواعد نموذج البرمجة الخطية تعظيم ربحية، فإنه يمكن إعداد جدول السمبلكس الأول على النحو الآتي:

رو			٦	١٠	صفر	صفر	صفر
	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	س١	س٢	غ١	غ٢	غ٣
صفر	غ١	٣٦	٦	٤	١	صفر	صفر
صفر	غ٢	٨	٢	صفر	صفر	١	صفر
صفر	غ٣	١٢	صفر	٢	صفر	صفر	١
اختبار المثالية ص و		صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
رو ـ ص و			٦	١٠	صفر	صفر	صفر

وباتباع خطوات حل نموذج البرمجة الخطية، بتطبيق القواعد التي سبق بيانها في قواعد تطبيق طريقة السمبلكس لتعظيم الربحية: فإننا يمكننا الوصول إلى جدول السمبلكس الأمثل الآتي:

رو			٦	١٠	صفر	صفر	صفر
	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	س١	س٢	غ١	غ٢	غ٣
٦	س١	٢	١	صفر	$\frac{1}{6}$	صفر	$\frac{-1}{3}$
صفر	غ٢	٤	صفر	صفر	$\frac{-1}{3}$	١	$\frac{2}{3}$
١٠	س٢	٦	صفر	١	صفر	صفر	$\frac{1}{2}$
اختبار المثالية ص و		٧٢	٦	١٠	١	صفر	٣
رو ـ ص و			صفر	صفر	١ـ	صفر	٣ـ

ويلاحظ علي جدول السمبلكس الأمثل السابق الآتي:

١- الحل يعتبر حلاً أمثلاً: وذلك لأن معاملات كل المتغيرات في صف التقييم النهائي ($ر_و$ – $ص_و$): صفرية أو سالبة.

٢- يتحدد مزيج الإنتاج الأمثل كالآتي:

$س_١$ = ٢ وحدة، $س_٢$ = ٦ وحدات، كما أن أقصى ربح = ٧٢ جنيهاً.

٣- هناك طاقة عاطلة فائضة في المورد الثاني يمثلها المتغير الراكد $غ_٢$ وقدرها ٤ ساعات.

٤- أسعار ظل الموارد تتحدد على النحو الآتي:

أ- المورد الأول له سعر ظل = ١ جنيهاً واحداً، وطاقته مستغلة بالكامل.

ب- المورد الثالث له سعر ظل = ٣ جنيهات، وطاقته مستغلة بالكامل.

ج- المورد الثاني له سعر ظل = صفر، لأن به طاقة عاطلة قدرها ٤ ساعات.

حل المشكلة الثنائية (المقابلة):

يمكن تحويل المشكلة الأصلية، إلى مشكلة مقابلة، على النحو الآتي:

المطلوب تدنية الدالة:

$ت_و$ = ٣٦ $ص_١$ + ٨ $ص_٢$ + ١٢ $ص_٣$

وذلك طبقا للقيود الآتية:

٦ $ص_١$ + ٢ $ص_٢$ ≤ ٦

٤ $ص_١$ + ٢$ص_٣$ ≤ ١٠

وطبقا لشرط عدم السالبية فإن:

$ص_١$ ؛ $ص_٢$ ؛ $ص_٣$ ≤ صفر

ويظهر الحل الأمثل للنموذج الثنائي الذي يهدف إلى تخفيض أو تدنية التكاليف كالآتي:

ت$_و$			٣٦	٨	١٢	صفر	صفر
	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	ص$_1$	ص$_2$	ص$_3$	غ$_1$	غ$_2$
٣٦	ص$_1$	١	١	$\frac{1}{3}$	صفر	$\frac{-1}{6}$	صفر
١٢	ص$_3$	٣	صفر	$\frac{-2}{3}$	١	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{2}$
اختبار المثالية ص$_و$		٧٢	٣٦	٤	١٢	ـ٢	ـ٦
ت$_و$ ــ ص$_و$			صفر	٤	صفر	٢	٦

ويلاحظ علي جدول السمبلكس الأمثل السابق أنه يمثل الحل الأمثل، وذلك لأن معاملات كل المتغيرات في صف التقييم النهائي (ت$_و$ ــ ص$_و$) : صفرية أو موجبة.

مطابقة الحلول والتحقق:

١- قيمة دالة الهدف في النموذج الأصلي لتعظيم الأرباح: هي نفسها قيمة دالة الهدف في النموذج الثنائي لتدنية (تخفيض) التكاليف؛ وتحسب كالآتي:

تعظيم أرباح

٦ س$_1$ + ١٠ س$_2$

= ٦× ٢ + ١٠ × ٦

= ٧٢

تخفيض تكاليف

٣٦ ص$_1$ + ٨ ص$_2$ + ١٢ ص$_3$ =

=٣٦× ١ +٨ × صفر+ ١٢× ٣=

=٧٢

٢- معاملات المتغيرات الراكدة في صف (ر$_و$ ــ ص$_و$) في جدول السمبلكس الأصلي لتعظيم الأرباح: تمثل القيم المثلى للمتغيرات الثنائية – أسعار ظل الموارد : ص$_1$، ص$_2$، ص$_3$ حيث أن:

غ$_1$ = ص$_1$ = ١

غ$_2$ = ص$_2$ = صفر

غ$_3$ = ص$_3$ = ٣

٣- معاملات المتغيرات الأصلية س$_1$، س$_2$ في صف (ر$_و$ ــ ص$_و$) في جدول السمبلكس الأصلي لتعظيم الأرباح: تمثل قيم المتغيرات الراكدة في النموذج الثنائي لتخفيض التكاليف حيث أن:

$س_{١} = غ_{١} =$ صفر

$س_{٢} = غ_{٢} =$ صفر

٤- معاملات المتغيرات الأصلية $س_{١}$، $س_{٢}$، في صف ($ر_{و}$ – $ص_{و}$) في جدول السمبلكس الأصلي لتعظيم الأرباح: تمثل الفرق بين الجانب الأيمن – الذي يمثل التكاليف – والجانب الأيسر الذي يمثل الأرباح – لمعاملات القيود في النموذج الثنائي؛ ويظهر ذلك كما يلي:

$٦ ص_{١} + ٢ ص_{٢} \geq ٦$

$٦ × ١ + ٢ ×$ صفر $= ٦$

الفرق بين كلا الجانبين $= ٦ - ٦ =$ صفر وهو= معامل $س_{١}$

$٤ ص_{١} + ٢ ص_{٣} \geq ١٠$

$٤× ١ + ٢ × ٣ = ١٠$

الفرق بين كلا الجانبين $= ١٠ - ١٠ =$ صفر وهو = معامل $س_{٢}$

٥- معاملات المتغيرات الراكدة $غ_{١}$، $غ_{٢}$، كما تظهر في جدول السمبلكس الأمثل الثنائي لتخفيض التكاليف: تمثل القيم المثلى للمتغيرات الأساسية $س_{١}$، $س_{٢}$، $س_{٣}$ كما تظهر في جدول السمبلكس الأمثل الأصلي لتعظيم الأرباح.

$غ_{١} = س_{١} = ٢$

$غ_{٢} = س_{٢} = ٦$

٦- معاملات المتغيرات الأصلية $ص_{١}$، $ص_{٢}$، $ص_{٣}$ (والتي تظهر في جدول السمبلكس الأمثل الثنائي لتخفيض التكاليف): تمثل قيمة المتغيرات الراكدة $غ_{١}$، $غ_{٢}$، $غ_{٣}$ (والتي تظهر في جدول السمبلكس الأمثل الأصلي لتعظيم الأرباح)؛ حيث أن:

$ص_{١} = غ_{١} =$ صفر

$ص_{٢} = غ_{٢} = ٤$

$ص_{٣} = غ_{٣} =$ صفر

<u>تمرين رقم (٤)</u>:

قدم إليك نموذج البرمجة الخطية الأصلي التالي:

المطلوب تدنية التكاليف $= ٦ ص_{١} + ٣ ص_{٢} + ٤ ص_{٣}$

وذلك طبقا للقيود الآتية:

ص$_1$ ≤ ٣٠

ص$_2$ ≤ ٥٠

ص$_3$ ≤ ٢٠

ص$_1$ + ص$_2$ + ص$_3$ = ١٢٠

<u>والمطلوب:</u>

١-التوصل إلى الحل الأمثل للنموذج السابق.

٢-صياغة النموذج الثنائي له.

٣-مطابقة الحلول بين النموذجين الأصلي والثنائي.

١- يظهر جدول السمبلكس الأمثل الأصلي للنموذج السابق لتخفيض التكاليف كالآتي:

ت$_و$			٦	٣	٤	صفر	صفر	صفر
	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	ص$_1$	ص$_2$	ص$_3$	غ$_1$	غ$_2$	غ$_3$
٦	ص$_1$	٣٠	١	صفر	صفر	١-	صفر	صفر
٣	ص$_2$	٧٠	صفر	١	صفر	١	صفر	١
٤	ص$_3$	٢٠	صفر	صفر	١	صفر	صفر	١-
صفر	غ$_2$	٢٠	صفر	صفر	صفر	١	١	١
اختبار المثالية ص$_و$		٤٧٠	٦	٣	٤	٣-	صفر	١-
ت$_و$ - ص$_و$			صفر	صفر	صفر	٣	صفر	١

<u>٢- صياغة النموذج الثنائي:</u>

تعظيم أرباح = ٣٠ س$_1$ + ٥٠ س$_2$ + ٢٠س$_3$ + ١٢٠ س$_4$

طبقا للقيود الآتية:

س$_1$+ س$_4$ ≥ ٦

س$_2$+ س$_4$ ≥ ٣

س$_3$ + س$_4$ ≥ ٤

وطبقا لشرط عدم السالبية:

س$_1$؛ س$_2$؛ س$_3$؛ س$_4$ ≤ صفر

ويظهر الحل الأمثل للنموذج الثنائي لتعظيم الأرباح كالآتي:

رو			٣٠	٥٠	٢٠	١٢٠	صفر	صفر	صفر
	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	س$_1$	س$_2$	س$_3$	س$_4$	غ$_1$	غ$_2$	غ$_3$
٣٠	س$_1$	٣	١	-١	صفر	صفر	١	-١	صفر
١٢٠	س$_4$	٣	صفر	١	صفر	١	صفر	١	صفر
٢٠	س$_3$	١	صفر	-١	١	صفر	صفر	-١	١
اختبار المثالية ص و		٤٧٠	٣٠	٧٠	٢٠	١٢٠	٣٠	٧٠	٢٠
رو – ص و			صفر	-٢٠	صفر	صفر	-٣٠	-٧٠	-٢٠

وهنا يجب ملاحظة أن المطابقة وتحقيق النتائج تتم من نموذج تعظيم الأرباح سواءً أكان اصلياً أو ثنائياً إلى نموذج تخفيض التكاليف؛ كما يلاحظ أيضاً أن المطابقة رقم [(٦) صفحة ١٠٧] لن تتحقق هنا بسبب أن متباينات النموذج الأصلي لتخفيض التكاليف ليست كلها من النوع أكبر من أو يساوى، بل يتضمن النموذج متباينة في شكل متساوية، وبالتالي يمكن إجراء خمس مطابقات فقط وذلك كما يتبين مما يلي:

١- قيمة دالة الهدف في النموذج الأصلي هي نفسها قيمة دالة الهدف في النموذج الثنائي وتحسب كالآتي:

تعظيم أرباح

٣٠ س$_1$ + ٥٠ س$_2$ + ٢٠ س$_3$ + ١٢٠ س$_4$

٣٠(٣) + صفر + ٢٠ (١) + ١٢٠(٣) =٤٧٠ جنيهاً

تخفيض تكاليف

٦ص$_1$ +٣ص$_2$ +٤ص$_3$

= ٦(٣٠) + ٣(٧٠)+٤(٢٠) = ٤٧٠جنيهاً

٢- معاملات المتغيرات الراكدة غ$_1$، غ$_2$، غ$_3$، في النموذج الثنائي لتعظيم الأرباح: تمثل القيم للمتغيرات الأصلية – أسعار الظل – في النموذج الأصلي لتخفيض التكاليف.

غ$_1$ = ص$_1$ = ٣٠

غ$_2$ = ص$_2$ = ٧٠

غ$_3$ = ص$_3$ = ٢٠

٣- معاملات المتغيرات الأصلية $س_١$، $س_٢$، $س_٣$، كما تظهر في صف التقييم النهائي في جدول السمبلكس الثنائي لتعظيم الأرباح: تمثل قيم المتغيرات الراكدة في النموذج الأصلي لتخفيض التكاليف:

$س_١$ = $غ_١$ = صفر

$س_٢$ = $غ_٢$ = ٢٠

$س_٣$ = $غ_٣$ = صفر

٤- معاملات المتغيرات الأصلية $س_١$، $س_٢$، $س_٣$، $س_٤$ كما تظهر في صف ($ر_و$ – $ص_و$) في جدول السمبلكس الثنائي لتعظيم الأرباح هي الفرق بين الجانب الأيمن – التكاليف – والجانب الأيسر – الأرباح – لمعاملات القيود في النموذج الأصلي لتخفيض التكاليف.

حيث يظهر كالآتي:

$ص_١$ ≤ ٣٠

٣٠ - ٣٠ = صفر معامل $س_١$

$ص_٢$ ≤ ٥٠

٧٠ – ٥٠ = ٢٠ معامل $س_٢$

$ص_٣$ ≤ ٢٠

٢٠ – ٢٠ = صفر معامل $س_٣$

$ص_١$ + $ص_٢$ + $ص_٣$ =١٢٠

١(٣٠) + ١(٧٠) + (١٠٢٠) =١٢٠

١٢٠-١٢٠ = صفر معامل $س_٤$

٥- معاملات المتغيرات الراكدة $غ_١$، $غ_٢$، $غ_٣$ كما تظهر في صف ($ر_و$ – $ص_و$) في جدول السمبلكس الأمثل لتخفيض التكاليف: تمثل القيم المثلى للمتغيرات الأساسية $س_١$، $س_٢$، $س_٣$ كما تظهر في صف ($ر_و$ – $ص_و$) في جدول السمبلكس الأمثل لتعظيم الأرباح حيث أن:

$ص_٤$ = $س_١$ = ٣

$ص_٥$ = $س_٢$ = صفر

$ص_٦$ = $س_٣$ =١

الفصل الثامن

طرق النقل والتعيين

أولاً: أسئلة نظرية:

١/١ – لكل سؤال من الأسئلة التالية عدة إجابات والمطلوب تحديد الإجابة الصحيحة منها:

١ - إذا كان عدد المصادر أربعة والمنافذ ثلاثة، فإنه لإعداد الحل المبدئي بطريقة الركن الشمالي الشرقي يلزم:

أ – إضافة مصدر رهمي. ب - إضافة منفذ وهمي.

ج- كل ما سبق. د - لا شئ مما سبق.

٢ - إذا كان عدد المصادر ٤ والمنافذ ٣ فإن عدد الخلايا المشغولة في أي جدول لحل هذه المشكلة يلزم أن يكون:

أ – ٤ خلايا. ب- ٧ خلايا.

ج- ٣ خلايا. د – لا شئ مما سبق.

٣ - بفرض أنه تم إضافة كمية صفرية لإحدى الخلايا الفارغة حتى يكون الحل ممكن، فإنه بعد تحسين الحل والانتقال إلى حل آخر خلاف الحل الحالي، فإن الخلية الصفرية السابق إضافتها يمكن أن:

أ – تظل مكانها. ب- تتحول من مكانها.

ج – تصبح مشغولة بكمية فعالية. د – كل ما سبق.

٤ - حيث أن مشاكل النقل ومشاكل التعيين تعتبر نوع من مشاكل البرمجة الخطية فإن:

أ – مشاكل النقل والتعيين يمكن حلها بطريقة السمبلكس.

ب- كل مشاكل البرمجة الخطية تحل بطريقة النقل والتعيين.

ج – مشاكل التعيين تحل بطريقة النقل.

د – مشاكل النقل تحل بطريقة التعيين.

٥ - حتى يمكن حل مشكلة النقل بطريقة النقل فإنه يلزم توافر حالة التوازن، ولتوفير حالة التوازن يلزم أن يكون:

أ – عدد المصادر يساوي عدد المنافذ.

ب- تساوي طاقات جميع المصادر.

ج – تساوي احتياجات جميع المنافذ. د – لا شئ مما سبق.

٦ - عند حل مشاكل التعيين إذا كان عدد الصفوف (الموارد أو الإمكانات مثلاً) ثلاثة وعدد الأعمدة (الاستخدامات) خمسة فإنه يلزم:

أ – إضافة صف. ب- إضافة صفين.

ج – حذف عمودين. د – لا شئ مما سبق.

٧ - بفرض أن عدد الصفوف في إحدى مشاكل التعيين كان ٤ صفوف، فإن الحل يكون أمثل إذا كانت هناك على الاقل:

أ – ٣ خلايا صفرية مستقلة. ب- ٥ خلايا صفرية مستقلة.

ج – ٤ خلايا صفرية مستقلة. د- لا شئ مما سبق.

٨ - الكمية الممكن نقلها إلى الخلية المراد شغلها عند تحسين الحل في مشاكل النقل تتمثل في:

أ – أقل كمية في جميع خلايا المسار المغلق لهذه الخلية.

ب- أكبر كمية في جميع خلايا المسار المغلق لهذه الخلية.

ج – أكبر كمية في جميع الخلايا التي اشارتها سالبة في المسار المغلق.

د – أقل كمية في جميع الخلايا التي اشارتها موجبة في المسار المغلق.

هـ- لا شئ مما سبق.

٩ - يكون الحل أمثل في حالة تخفيض تكاليف النقل إذا كانت تكلفة الفرصة المضاعة لجميع الخلايا الفارغة:

أ – موجبة. ب- سالبة. ج- سالبة وصفر.

د – موجبة وصفر. هـ- لا شئ مما سبق.

١٠- يكون الحل الأمثل حل وحيد في مشاكل النقل تعظيم أرباح إذا كانت تكلفة الفرصة لجميع الخلايا الفارغة:

أ – موجية. ب- سالبة وصفر. ج – سالبة.

د – موجبة وصفر. هـ- لا شئ مما سبق.

١١- طبقاً لخاصية التتابعية في البرامج الخطية فإن كل حل في مشاكل النقل يعطي تكلفة:

أ – تساوي تكلفة الحل السابق له. ب- تقل عن تكلفة الحل السابق له.

ج – تزيد عن تكلفة الحل السابق له. د- لا شئ مما سبق.

٢/٢- حدد صحة أو خطأ العبارات التالية (مع التعليل باختصار):

١ - تعطي طريقة الركن الشمالي الشرقي أقل تكلفة نقل للحل المبدئي.

٢ - تصلح طريقة حجر الوطء لاختبار الحل المبدئي المعد وفقاً لطريقة فوجل التقريبية فقط.

٣ - يلزم في جميع مشاكل النقل تساوي عدد المصادر مع عدد المنافذ حتى يتوافر شرط التوازن.

٤ - تختلف تكلفة الفرصة للخلايا الفارغة باختلاف قيم الصفوف والأعمدة والتي تختلف بدورها باختلاف الصف أو العمود الذي يفترض أن قيمته صفر عند اختبار المثالية بطريقة التوزيع المعدل.

٥ - إذا اكتمل صف وعمود في وقت واحد عند تطبيق طريقة فوجل التقريبية لإعداد الحل المبدئي، يتم حذفهما معاً للتوصل إلى الحل المبدئي بصورة أسرع.

٦ - الخلايا الفارغة في الصف أو في العمود الصوري تؤخذ في الاعتبار عند اختبار مثالية الحل.

٧ - لايتأثر جدول الحل سواء كان عدد خلايا المسار المغلق للخلية المراد شغلها زوجي أو فردي.

٨ - حيث أن مشاكل النقل تعتبر نوعاً خاصاً من مشاكل البرمجة الخطية، فإنه وفقاً لخاصية التتابعية فإن كل جدول حل في مشاكل تعظيم الأرباح يعطي أرباحاً تساوي أرباح الجدول السابق له أو تزيد عنها.

٩ - في مشاكل التعيين يمكن أن تكون القيمة التي تعين لأى خلية أكبر من واحد صحيح ولكن لايصح أن تكون أقل من واحد صحيح.

١٠- كل مشكلة تعيين يكون لها حل بطريقة السمبلكس.

ثانياً: حالات عملية

الحالة الأولى:

تمتلك إحدى الشركات الصناعية ثلاثة مصانع أ١ ، أ٢ ، أ٣ تبلغ الطاقة الإنتاجية السنوية لها ٤٠٠ ، ٥٠٠ ، ٨٠٠ وحدة على الترتيب، كما تمتلك ثلاثة مراكز للتوزيع ب١ ، ب٢ ، ب٣ تبلغ الطاقة التسويقية السنوية لها ٦٠٠ ، ٧٥٠ ، ٣٥٠ وحدة على الترتيب، هذا وتكلفة نقل الوحدة من كل مصنع إلى كل مركز كانت كما يلي: (بالجنيه):

	ب١	ب٢	ب٣
أ١	٢٥	٣٠	٣٠
أ٢	٤٥	٤٠	٦٠
أ٣	١٠	٧٠	٩٠

والمطلوب: إعداد برنامج النقل الأمثل الذي يحمل الشركة أقل تكلفة نقل ممكنة.

(يتم إعداد الحل المبدئي بطريقة أقل تكلفة واختبار المثالية بطريقة حجر الوطء.)

الحل المقترح

أولاً: إعداد جدول الحل المبدئي:

مراكز البيع / المصانع	ب١	ب٢	ب٣	الطاقات
أ١	٢٥	٣٠ / ٤٠٠	٣٠	٤٠٠
أ٢	٤٥	٤٠ / ٣٥٠	٥٠ / ١٥٠	٥٠٠
أ٣	١٠ / ٦٠٠	٧٠	٩٠ / ٢٠٠	٨٠٠
الاحتياجات	٦٠٠	٧٥٠	٣٥٠	١٧٠٠

ملاحظات على جدول الحل السابق:

- عدد الخلايا المشغولة خمس خلايا أي يساوي (عدد الصفوف + عدد الأعمدة – ١)، أي أن هذا حل ممكن مسموح به ويمكن اختبار مثاليته.
- تم البدء بملء الخلية أ$_{٣}$ ب$_{١}$ لأن لها أقل تكلفة نقل ثم الخلية أ$_{١}$ ب$_{٢}$ ، ثم أ$_{٢}$ ب$_{٢}$ ، ثم أ$_{٢}$ ب$_{٣}$ ، ثم أ$_{٣}$ ب$_{٣}$.
- تكلفة النقل طبقاً لهذا الجدول:

= ٤٠٠ × ٣٠ + ٣٥٠ × ٤٠ + ١٥٠ × ٦٠ + ٦٠٠ × ١٠ + ٢٠٠ × ٩٠ = ٥٩٠٠٠ جنيه.

ثانياً: اختبار مثالية الجدول الأول:

يتم تقويم الخلايا الفارغة بتحديد المسار المغلق لكل خلية فارغة وتكلفة الفرصة المضاعة لكل خلية كما يتضح من الجدول التالي:

الخلية الفارغة	المسار المغلق	التغير في التكلفة	التكلفة الفرصة
أ$_{١}$ ب$_{١}$	+ أ$_{١}$ ب$_{١}$ – أ$_{١}$ ب$_{٢}$ + أ$_{٢}$ ب$_{٢}$ – أ$_{٢}$ ب$_{٣}$ + أ$_{٣}$ ب$_{٣}$ – أ$_{٣}$ ب١	٢٥ – ٣٠ + ٤٠ -٦٠ + ٩٠٠ – ١٠ = ٥٥	-٥٥
أ$_{١}$ ب$_{٣}$	+ أ$_{١}$ ب$_{٣}$ – أ$_{١}$ ب$_{٢}$ + أ$_{٢}$ ب$_{٢}$ – أ$_{٢}$ ب$_{٣}$	٣٠ – ٣٠ + ٤٠ - ٦٠ = -٢٠	٢٠
أ$_{٢}$ ب$_{١}$	+ أ$_{٢}$ ب$_{١}$ – أ$_{٣}$ ب$_{١}$ + أ$_{٣}$ ب$_{٣}$ – أ$_{٢}$ ب$_{٣}$	٤٥ – ١٠ + ٩٠ - ٦٠ = ٦٥	-٦٥
أ$_{٣}$ ب$_{٢}$	+ أ$_{٣}$ ب$_{٢}$ – أ$_{٣}$ ب$_{٢}$ + أ$_{٢}$ ب$_{٣}$ – أ$_{٣}$ ب$_{٣}$	٧٠ – ٤٠ + ٦٠ - ٩٠ = صفر	صفر

يتضح من تقويم الخلايا الفارغة أن هناك تكلفة فرصة مضاعة للخلية أ$_{١}$ ب$_{٣}$ موجبة، إذن ليس هذا حل أمثل وهناك فرصة لتخفيض التكاليف وذلك بملء الخلية أ$_{١}$ ب$_{٣}$ حيث أن كل وحدة يتم نلقها إلى هذه الخلية تخفض التكاليف الكلية للنقل بمبلغ ٢٠ جنيه ولتحسين الحل يتم إدخال الخلية أ$_{١}$ ب$_{٣}$ في الحل الجديد.

وتكون تكلفة النقل طبقاً للحل الثاني:

= ٢٥٠ × ٣٠ + ١٥٠ × ٣٠ + ٥٠٠ × ٤٠ + ٦٠٠ × ١٠ + ٢٠٠ × ٩٠

= ٥٦٠٠٠ جنيه.

∴ مقدار التخفيض في تكاليف النقل = ٣٠٠٠جنيه (٥٩٠٠٠ تكلفة الحل الأول – ٥٦٠٠٠ تكلفة الحل الثاني).

ثالثاً: تحسين الحل:

١ – تحديد الكمية الممكن نقلها إلى الخلية $أ_1$ $ب_3$

بفحص خلايا المسار المغلق لهذه الخلية يتضح أن الخلايا التي اشارتها سالبة في هذا المسار (يعني يتم النقل منها) هي $أ_1$ $ب_2$ ، $أ_2$ $ب_3$ وأقل كمية في هاتين الخليتين هى ١٥٠ وحدة في الخلية $أ_2$ $ب_3$ إذن يتم نقل ١٥٠ وحدة فقط إلى الخلية $أ_1$ $ب_3$.

٢ – أثر ملء الخلية $أ_1$ $ب_3$ على خلايا المسار المغلق لها:

الخلية $أ_1$ $ب_3$ = صفر + ١٥٠ = ١٥٠ وحدة

الخلية $أ_1$ $ب_2$ = ٤٠٠ – ١٥٠ = ٢٥٠ وحدة

الخلية $أ_2$ $ب_2$ = ٣٥٠ + ١٥٠ = ٥٠٠ وحدة

الخلية $أ_2$ $ب_3$ = ١٥٠ – ١٥٠ = صفر وحدة

وباقي خلال الجدول تظل كما هى دون تغير.

٣ – إعداد جدول النقل الثاني:

مراكز التوزيع / المصانع	$ب_1$	$ب_2$	$ب_3$	الطاقات
$أ_1$	٢٥	٣٠ / ٢٥٠	٣٠ / ١٥٠	٤٠٠
$أ_2$	٤٥	٤٠ / ٥٠٠	٦٠	٥٠٠
$أ_3$	١٠ / ٦٠٠	٧٠	٩٠ / ٢٠٠	٨٠٠
الاحتياجات	٦٠٠	٧٥٠	٣٥٠	١٧٠٠

رابعاً: اختبار مثالية الجدول التالي:

يوضح الجدول التالي نتيجة تقويم الخلايا الفارغة لجدول الحل الثاني.

الخلية الفارغة	المسار المغلق	التغير في التكلفة	التكلفة الفرصة
أ١ ب١	+ أ١ ب١ – أ١ ب٣ + أ٣ ب٣ – أ٣ ب١	٢٥ – ٣٠ + ٩٠ -١٠ = ٧٥	- ٧٥
أ٢ ب١	+ أ٢ ب١ – أ٣ ب١ + أ٣ ب٣ – أ١ ب٣ + أ١ ب٢ – أ٢ ب٢	٤٥ – ١٠ + ٩٠ - ٣٠ + ٣٠ – ٤٠ = ٨٥	- ٨٥
أ٢ ب٣	+ أ٢ ب٣ – أ٢ ب٢ + أ١ ب٢ – أ١ ب٣	٦٠ – ٤٠ + ٣٠ - ٣٠ = ٢٠	- ٢٠
أ٣ ب٢	+ أ٣ ب٢ – أ١ ب٢ + أ١ ب٣ – أ٣ ب٣	٧٠ – ٣٠ + ٣٠ - ٩٠ = -٢٠	+ ٢٠

يتضح من الجدول السابق أن تكلفة الفرصة المضاعة للخلية أ٣ ب٢ موجبة، معنى ذلك أن جدول الحل الثاني ليس حل أمثل، وللتحسين يلزم إدخال الخلية أ٣ ب٢ في الحل الجديد.

خامساً: تحسين الحل الثاني وإعداد جدول الحل الثالث:

١ – تحديد الكمية الممكن نقلها إلى الخلية أ٣ ب٢:

يتم نقل ٢٠٠ وحدة إلى الخلية أ٣ ب٢ لأنها أقل كمية في الخلايا التي اشارتها سالبة في المسار المغلق لهذه الخلية.

٢ – إعداد جدول الحل الثالث:

المصانع / مراكز البيع	ب١	ب٢	ب٣	الطاقات
أ١	٢٥	٣٠ ٥٠	٣٠ ٣٥٠	٤٠٠
أ٢	٤٥	٤٠ ٥٠٠	٦٠	٥٠٠
أ٣	١٠ ٦٠٠	٧٠ ٢٠٠	٩٠	٨٠٠
الاحتياجات	٦٠٠	٧٥٠	٣٥٠	١٧٠٠

وتكون تكلفة النقل طبقاً لجدول الحل الثالث =

٥٠ × ٣٠ + ٣٥٠ × ٣٠ + ٥٠٠ × ٤٠ + ٦٠٠ × ١٠ + ٢٠٠ × ٧٠ = ٥٢٠٠٠ جنيه.

∴ مقدار التخفيض في تكاليف النقل ٤٠٠٠ جنيه (٥٦٠٠٠ تكاليف البرنامج الثاني – ٥٢٠٠٠ تكاليف البرنامج الثالث).

سادساً: اختبار مثالية الحل الثالث:

يوضح الجدول التالي نتيجة تقويم الخلايا الفارغة في جدول الحل الثالث.

الخلية الفارغة	المسار المغلق	التغير في التكلفة	التكلفة الفرصة
أ١ ب١	+ أ١ ب١ – أ١ ب٢ + أ٣ ب٢ – أ٣ ب١	٢٥ – ٣٠ + ٧٠ -١٠ = ٥٥	- ٥٥
أ٢ ب١	+ أ٢ ب١ – أ٢ ب٢ + أ٣ ب٢ – أ٣ ب١	٤٥ – ٤٠ + ٧٠ - ١٠ = ٦٥	- ٦٥
أ٢ ب٣	+ أ٢ ب٣ – أ٢ ب٢ + أ١ ب٢ – أ١ ب٣	٦٠ – ٤٠ + ٣٠ - ٣٠ = ٢٠	- ٢٠
أ٣ ب٣	+ أ٣ ب٣ – أ١ ب٣ + أ١ ب٢ – أ٣ ب٢	٥٠ – ٣٠ + ٣٠ - ٧٠ = - ٢٠	- ٢٠

يتضح من الجدول السابق أن تكلفة الفرصة المضاعة لجميع الخلايا الفارغة سالبة (أي لاتوجد تكلفة فرصة موجبة) وبذلك يكون جدول الحل الثالث السابق هو جدول الحل الأمثل.

سابعاً: برنامج النقل الأمثل: (الحل الأمثل):

بفحص جدول الحل الثالث (الحل الأمثل) يكون برنامج الحل الأمثل كما يلي:

- طاقة المصنع أ١ يخصص منها ٥٠وحدة لمركز البيع ب٢، ٣٥٠ وحدة لمركز البيع ب٣.
- طاقة المصنع أ٢ تخصص بالكامل لمركز البيع ب٢.
- طاقة المصنع أ٣ يخصص منها ٦٠٠وحدة لمركز البيع ب١، ٣٠٠وحدة لمركز البيع ب٢.

وأقل تكلفة نقل ممكنة هى ٤٢٠٠٠ جنيه.

الحالة الثانية:

المطلوب: حل الحالة السابقة (الأولى) على فرض أن طاقة المصنع $أ_١$ ٦٠٠وحدة وطاقة المصنع $أ_٣$ ٦٠٠وحدة. وذلك باستخدام طريقة الركن الشمالي الشرقي في إعداد الحل المبدئي وطريقة حجر الوطء في اختبار المثالية.

الحالة الثالثة:

الجدول التالي يوضح كيفية توزيع إنتاج إحدى الشركات الصناعية من مصانعها $أ_١$ ، $أ_٢$ ، $أ_٣$ على مراكز التوزيع $ب_١$ ، $ب_٢$ ، $ب_٣$.

مراكز التوزيع / المصانع	$ب_١$	$ب_٢$	$ب_٣$	الطاقات
$أ_١$	(٦) ٤٠٠	(٥) ٤٠٠	(٢)	٨٠٠
$أ_٢$	(٨)	(٤) ٦٠٠	(١) ١٠٠	٧٠٠
$أ_٣$	(٤)	(٣)	(٥) ٥٠٠	٥٠٠
الاحتياجات	٤٠٠	١٠٠٠	٦٠٠	٢٠٠٠

المطلوب:

١ - هل جدول الحل السابق هو جدول الحل الأمثل؟ استخدم طريقة التوزيع المعدل لاختبار المثالية.

٢ - إذا لم يكن الحل السابق هو الحل الأمثل. فالمطلوب إعداد جدول الحل الأمثل وتحديد ما إذا كان الحل الأمثل الذي تتوصل إليه حل أمثل وحيد أم لا؟

الحل المقترح:

أولاً: تكلفة النقل طبقاً للجدول السابق =

٤٠٠ × ٦ + ٤٠٠ × ٥ + ٦٠٠ × ٤ + ١٠٠٠ × ١ + ٥٠٠ × ٥ =

٩٤٠٠ جنيه.

ثانياً: اختبار مثالية الحل السابق بطريقة التوزيع المعدل:

يتم إضافة عمود (لتسجل به قيم الصفوف) وصف لتسجيل به قيم الأعمدة) وتحسب قيم الصفوف والأعمدة ويكون الجدول على النحو التالي:

قيم الصفوف	قيم الأعمدة / مراكز البيع / المصانع	ع$_1$ = ٦	ع$_2$ = ٥	ع$_3$ = ٢	
	مراكز البيع / المصانع	ب$_1$	ب$_2$	ب$_3$	الطاقات
ف$_1$ = صفر	أ$_1$	[٦] ٤٠٠	[٥] ٤٠٠	[٢]	٨٠٠
ف$_2$ = -١	أ$_2$	[٨]	[٤] ٦٠٠	[١] ١٠٠	٧٠٠
ف$_3$ = ٣	أ$_3$	[٤]	[٣]	[٥] ٥٠٠	٥٠٠
	الاحتياجات	٤٠٠	١٠٠٠	٦٠٠	٢٠٠٠

تم حساب قيم الصفوف والأعمدة كما يلي:

تكلفة الخلية المشغولة = صفها + عمودها

ت = ف + ع

بفرض أن قيمة الصف الأول صفر (ف$_1$ = صفر)

ت$_{11}$ = ف$_1$ + ع$_1$

٦ = صفر + ع$_1$ ∴ ع$_1$ = ٦

ت$_{21}$ = ف$_1$ + ع$_2$

٥ = صفر + ع$_2$ ∴ ع$_2$ = ٥

ت$_{22}$ = ف$_2$ + ع$_2$

٤ = ف$_2$ + ٥   ∴ ف$_2$ = -١

ت$_{32}$ = ف$_2$ + ع$_3$

١ = -١ + ع$_3$ ∴ ع$_3$ = ٢

ت$_{33}$ = ف$_3$ + ع$_3$

٥ = ف$_3$ + ٢   ∴ ف$_3$ = ٣

تكلفة الفرصة المضاعة للخلايا الفارغة:

تكلفة الفرصة المضاعة للخلايا الفارغة:

تكلفة الفرصة (ص) = قيمة الصف (ف) + قيمة العمود (ع) – تكلفة الخلية (ت)

∴ $ص_{٣١}$ = $ف_{١}$ + $ع_{٣}$ - ٢

= صفر + ٢ - ٢ = صفر

$ص_{١٢}$ = $ف_{٢}$ + $ع_{١}$ - ٨

= -١ + ٦ - ٨ = -٣

$ص_{١٣}$ = $ف_{٣}$ + $ع_{١}$ - ٤

= ٣ + ٦ - ٤ = ٥

$ص_{٢٣}$ = $ف_{٣}$ + $ع_{٢}$ - ٣

= ٣ + ٥ - ٢ = ٥

يتضح من نتائج تقويم الخلايا الفارغة أن هناك أكثر من خلية فارغة لها تكلفة فرصة موجبة، إذن ليس الحل السابق حل أمثل، ولتحسينه يتم ملء الخلية الفارغة التي لها أكبر تكلفة فرصة موجبة، وحيث أن الخليتين $أ_{٣}$ $ب_{١}$ ، $أ_{٣}$ $ب_{٢}$ لهما نفس تكلفة الفرصة المضاعة الموجبة (هى ٥) إذن يتم اختيار إحداهما عشوائياً، ولكن يمكن أن يتم البدء بالخلية التي يمكن أن ينقل إليها أكبر عدد من الوحدات حيث ذلك يوصل إلى الحل الأمثل بصورة أسرع.

هذا وبفحص الجدول السابق وعلى ضوء المسار المغلق لكل خلية منهما يتضح أن أقصى كمية يمكن نقلها للخلية $أ_{٣}$ $ب_{١}$ هى ٤٠٠وحدة. وللخلية $أ_{٣}$ $ب_{٢}$ هى ٥٠٠ وحدة، لذلك يفضل ملء الخلية $أ_{٣}$ $ب_{٢}$. ويتطلب ذلك تحديد مسارها المغلقة وهو على النحو التالي + $أ_{٣}$ $ب_{٢}$ – $أ_{٢}$ $ب_{٢}$ + $أ_{٢}$ $ب_{٣}$ – $أ_{٣}$ $ب_{٣}$ ويكون جدول النقل الجديد كما يلي:

قيم الصفوف	قيم الأعمدة / مراكز البيع ↘ المصانع	ع$_{١}$ = ١ / ب$_{١}$	ع$_{٢}$ = صفر / ب$_{٢}$	ع$_{٣}$ = -٣ / ب$_{٣}$	الطاقات
ف$_{١}$ = ٥	أ$_{١}$	[٦] ٤٠٠	[٥] ٤٠٠	[٢]	٨٠٠
ف$_{٢}$ = ٤	أ$_{٢}$	[٨]	[٤] ١٠٠	[١] ٦٠٠	٧٠٠
ف$_{٣}$ = ٣	أ$_{٣}$	[٤]	[٣] ٥٠٠	[٥]	٥٠٠
	الاحتياجات	٤٠٠	١٠٠٠	٦٠٠	٢٠٠٠

تكلفة النقل طبقاً للجدول السابق =

٤٠٠ × ٦ + ٤٠٠ × ٥ + ١٠٠ × ٤ + ٦٠٠ × ١ + ٥٠٠ × ٣ =

٦٩٠٠جنيه

∴ مقدار التخفيض في تكلفة النقل = ٩٤٠٠ – ٦٩٠٠ = ٢٥٠٠جنيه وهى تعادل حاصل ضرب ٥٠٠ وحدة ثم نقلها إلى أ$_{٣}$ ب$_{٢}$ × ٥ج تكلفة الفرصة لهذه الخلية.

اختبار مثالية الجدول السابق:

تم حساب قيم الصفوف وقيم الأعمدة كما يلي:

بفرض أن قيمة العمود الثاني صفر أي أن ع$_{٢}$ = صفر

ت$_{١٢}$ = ف$_{١}$ + ع$_{٢}$

٥ = ف$_{١}$ + صفر ∴ ف$_{١}$ = ٥

ت$_{٢٢}$ = ف$_{٢}$ + ع$_{٢}$

٤ = ف$_{٢}$ + صفر ∴ ف$_{٢}$ = ٤

ت$_{٣٢}$ = ف$_{٣}$ + ع$_{٢}$

٣ = ف$_{٣}$ + صفر ∴ ف$_{٣}$ = ٣

ت$_{١١}$ = ف$_{١}$ + ع$_{١}$

٦ = ٥ + ع$_{١}$ ∴ ؟؟؟ = ١

ت$_{٢٣}$ = ف$_{٢}$ + ع$_{٣}$

١ = ٤ + ع$_{٣}$ ∴ ع$_{٣}$ = -٣

تكلفة الفرصة المضاعة للخلايا الفارغة:

$ص_{٣١} = ف_{١} + ع_{٣} - ٢$

$= ٥ + (-٣) - ٢ = صفر$

$ص_{١٢} = ف_{٢} + ع_{١} - ٨$

$= ٤ + ١ - ٨ = -٣$

$ص_{١٣} = ف_{٣} + ع_{١} - ٤$

$= ٣ + ١ - ٤ = صفر$

$ص_{٣٣} = ف_{٣} + ع_{٣} - ٥$

$= ٣ + (-٣) - ٥ = -٥$

يتضح مما سبق أنه لاتوجد تكلفة فرصة موجبة، إذن الحل السابق هو الحل الأمثل.

ثالثاً: إعداد جدول الحل الأمثل:

المصانع / مراكز البيع	$ب_{١}$	$ب_{٢}$	$ب_{٣}$	الطاقات
$أ_{١}$	٦ ٤٠٠	٥ ٤٠٠	٢	٨٠٠
$أ_{٢}$	٨	٤ ١٠٠	١ ٦٠٠	٧٠٠
$أ_{٣}$	٤	٣ ٥٠٠	٥	٥٠٠
الاحتياجات	٤٠٠	١٠٠٠	٦٠٠	٢٠٠٠

رابعاً: هل الحل السابق حل أمثل وحيد:

بفحص تكلفة الفرصة المضاعة للخلايا الفارغة يتضح أن الخليتين $أ_{١}$ $ب_{٣}$ ، $أ_{٣}$ $ب_{١}$ لهما تكلفة فرصة صفر، معنى ذلك أن إدخال أي خلية منهما في الحل لن يغير تكاليف الحل الأمثل، ولكن يعطي برنامج آخر أمثل. أي أن الحل السابق ليس حلاً وحيداً، بل هناك حلين آخرين يعطيان نفس النتيجة يتمثل الحل الأول منهما في ملء الخلية $أ_{١}$ $ب_{٣}$ ويتمثل الحل الثاني في ملء الخلية $أ_{٣}$ $ب_{١}$.

الحالة الرابعة:

بفرض في الحالة السابقة (الثالثة) كانت طاقة المصنع أ٣ ٦٠٠وحدة (بدلاً من ٥٠٠وحدة) هل سيتغير برنامج الحل الأمثل السابق التوصل إليه في الحالة السابقة بفرض استخدام طريقة أدنى تكلفة في إعداد الحل المبدئي واختبار المثالية بطريقة التوزيع المعدل.

الحالة الخامسة:

يوجد في أحد مراكز الإنتاج ٣ آلات يمكن لأي آلة من هذه الآلات تنفيذ أي أمر من أوامر التشغيل الموكل تنفيذها لإدارة هذا المركز ولكن بتكاليف مختلفة، وفيما يلي بيان بتكاليف إتمام كل أمر إنتاجي من كل آلة من الآلات (بالجنيه)

الآلات	الأوامر الإنتاجية		
	س	ص	ع
أ	١٠٠	٧٠	٩٠
ب	٥٠	٤٠	٨٠
ج	٧٠	٩٠	٦٠

المطلوب: إعداد برنامج التعيين الأمثل الذي يحمل مركز الإنتاج أقل تكاليف ممكنة لإتمام أوامر التشغيل الثلاثة.

الحل المقترح

أولاً: إعداد مصفوفة الفرصة المضاعة:

١ - بطرح أصغر مفردة في كل صف من عناصر هذا الصف تكون المصفوفة كما يلي:

	س	ص	ع
أ	٣٠	صفر	٢٠
ب	١٠	صفر	٤٠
ج	١٠	٣٠	صفر

٢ - بطرح أصغر مفردة في كل عمود من عناصر هذا العمود تكون المصفوفة السابقة كما يلي:

	س	ص	ع
أ	٢٠	صفر	٢٠
ب	صفر	صفر	٤٠
ج	صفر	٣٠	صفر

ثانياً: اختبار مثالية الحل:

يتم رسم خطوط تغطي الخلايا الصفرية كما يلي:

	س	ص	ع
أ	٢٠	صفر	٢٠
ب	صفر	صفر	٤٠
ج	صفر	٣٠	صفر

حيث أن أقل عدد ممكن من الخطوط هو ثلاثة خطوط، أي أن عدد الخطوط يساوي عدد الصفوف أو عدد الأعمدة، معنى ذلك أن الحل السابق هو الحل الأمثل.

ثالثاً: إعداد برنامج الحل الأمثل وحساب التكاليف:

تعيين الآلة أ للأمر الإنتاجي ص بتكلفة قدرها ٧٠ جنيه.

تعيين الآلة ب للأمر الإنتاجي س بتكلفة قدرها ٥٠ جنيه.

تعيين الآلة ج للأمر الإنتاجي ع بتكلفة قدرها ٦٠ جنيه

التكلفة الإجمالية لبرنامج التعيين الأمثل = ١٨٠ جنيه

الحالة السادسة:

بفرض في الحالة السابقة كان عدد الأوامر الإنتاجية ٤ أوامر (س ، ص ، ع ، ل) وكانت تكلفة إتمام الأمر الرابع (ل) في كل آلة من الآلات الثلاثة ٦٠ ، ٩٠ ، ١٠٠ على الترتيب، فهل سيتغير برنامج التعيين السابق التوصل إليه في الحالة السابقة (الخامسة) وضح ذلك؟.

الحالة السابعة:

يواجه مدير إدارة المبيعات بمشكلة تعيين رجال البيع على مناطق البيع المختلفة نظراً لاختلاف أرقام الأرباح التي يحققها كل رجل بيع في كل منطقة بيع، ويرغب مدير إدارة المبيعات في وضع برنامج تعيين يحقق للشركة أقصى أرباح ممكنة، وعلى ضوء الخبرات السابقة أمكن توفير البيانات التالية عن أرباح رجال البيع في منافذ التوزيع. (بالألف جنيه).

رجال البيع	مناطق البيع		
	س	ص	ع
أ	١٠٠	٦٠	٤٠
ب	٧٠	٨٠	٥٠
ج	٤٠	٥٠	٣٠
د	٩٠	١٠٠	٦٠

والمطلوب: إعداد برنامج التعيين الأمثل وحساب أقصى أرباح ممكنة وفقاً للبرنامج المقترح:

الحل

تمهيد: حيث أن عدد رجال البيع أربعة وعدد مناطق البيع ثلاثة، لذلك يتم إضافة عمود رابع يمثل منطقة بيع وهمية (ل) وتكون أرباح منطقة البيع الوهمية صفر لجميع رجال البيع، وبذلك تكون المصفوفة كما يلي:

	س	ص	ع	ل
أ	١٠٠	٦٠	٤٠	صفر
ب	٧٠	٨٠	٥٠	صفر
ج	٤٠	٥٠	٣٠	صفر
د	٩٠	١٠٠	٦٠	صفر

أولاً: إعداد مصفوفة الأرباح المضاعة:

١ – بطرح عناصر كل صف من أكبر مفردة في هذا الصف تكون المصفوفة كما يلي:

	س	ص	ع	ل
أ	صفر	٤٠	٦٠	١٠٠
ب	١٠	صفر	٣٠	٨٠
ج	١٠	صفر	٢٠	٥٠
د	١٠	صفر	٤٠	١٠٠

٢ ـ بطرح أصغر مفردة في كل عمود من عناصر هذا العمود تكون المصفوفة السابقة كما يلي:

	س	ص	ع	ل
أ	صفر	٤٠	٤٠	٥٠
ب	١٠	صفر	١٠	٣٠
ج	١٠	صفر	صفر	صفر
د	١٠	صفر	٢٠	٥٠

ثانياً: اختبار مثالية الحل السابق:

برسم خطوط تغطي الخلايا الصفرية في المصفوفة السابقة تكون المصفوفة بعد رسم الخطوط كما يلي:

	س	ص	ع	ل
أ	صفر	٤٠	٤٠	٥٠
ب	١٠	صفر	١٠	٣٠
ج	١٠	صفر	صفر	صفر
د	١٠	صفر	٢٠	٥٠

حيث أن أقل عدد ممكن من الخطوط ثلاثة أي أقل من عدد الصفوف أو عدد الأعمدة، إذن الحل السابق ليس هو الحل الأمثل ويلزم تحسينه.

ثالثاً: تحسين الحل واختبار مثاليته:

بطرح أصغر مفردة لم يمر عليها خط من جميع المفردات التي ليس عليها خط وجمع نفس هذه المفردة على المفردات التي عند تقاطع الخطوط ونقل المفردات التي مر عليها خط واحد كما هى تكون المصفوفة السابقة كما يلي:

	س	ص	ع	ل
أ	صفر	٥٠	٤٠	٥٠
ب	صفر	صفر	صفر	٢٠
ج	١٠	١٠	صفر	صفر
د	صفر	صفر	١٠	٤٠

حيث أن أقل عدد ممكن من الخطوط التي تغطي الخلايا الصفرية هو ٤ خطوط أي تساوى عدد الصفوف أو عدد الأعمدة، إذن يكون الحل السابق هو الحل الأمثل.

رابعاً: برنامج التعيين وحساب الأرباح:

يعين رجل البيع أ في المنطقة س بأرباح قدرها ١٠٠ ألف جنيه

يعين رجل البيع د في المنطقة ص بأرباح قدرها ١٠٠ ألف جنيه

يعين رجل البيع ب في المنطقة ع بأرباح قدرها ٥٠ ألف جنيه

يعين رجل البيع ج في المنطقة ل بأرباح قدرها صفر

الأرباح الإجمالية لبرنامج التعيين الأمثل = ٢٥٠ ألف جنيه

يتضح من برنامج التعيين السابق ان رجل البيع ج سيظل بدون عمل في هذه المناطق لأن (ل) منطقة بيع صورية وعلى الإدارة أن تبحث له عن منطقة عمل أخرى تناسبه.

الحالة الثامنة:

بفرض في الحالة السابقة (السابعة) كان عدد رجال البيع خمسة (أ ، ب ، ج – د – هـ) وكانت الأرباح المتوقعة لرجل البيع (هـ) في المناطق الثلاثة (س ، ص ، ع) ٧٠ ، ٦٠ ، ٩٠ على الترتيب، كيف يكون الحل الأمثل؟ وهل يكون حل أمثل وحيد أم لا؟

الحالة التاسعة:

يوضح الجدول التالي الوقت اللازم لإتمام كل أمر من كل آلة في أحد مراكز الإنتاج (الوقت بالساعة):

الآلات	اوامر التشغيل		
	س	ص	ع
ا	١٠	٨	٧
ب	٥	٢	٣
ج	٦	٤	٩
د	١٠	١٢	١٥

فإذا علمت أن تكلفة تشغيل الآلة في الساعة ١٠٠ ، ١٥٠ ، ١٣٠ ، ٩٠ جنيه على الترتيب للآلات الأربعة.

فالمطلوب:

إعداد برنامج التعيين الذي يحمل الشركة أقل تكلفة تشغيل ممكنة.

نماذج أسئلة ذات اختيارات متعددة:

النموذج الأول

تمتلك شركة الامل ثلاثة مصانع (أ١ ، أ٢ ، أ٣) وثلاثة مخازن (ب ١ ، ب٢، ب٣) وتبلغ الطاقة الانتاجية للمصانع ٨٠٠ ، ٢٠٠٠ ،١٢٠٠ وحدة على الترتيب فى حين تقدر الطاقة التخزينية للمخازن ١٦٠٠، ١٤٠٠ ،١٠٠٠ وحدة على الترتيب ، وكانت تكلفة نقل للوحدة بالجنيه من كل مصنع الى كل مخزن كما يلى :

من ----الى	ب ١	ب ٢	ب٣
أ١	١٠	١٢	٨
أ ٢	٩	٨	٦
١ ٣	٤	٢	٩

فاذا علمت ان الشركة تتبع طريقة الركن الشمالى الشرقى فى اعداد جدول الحل المبدئى ،واختبار المثالية بطريق التوزيع المعدل فأن : (اجب على الاسئلة من ١ الى ١٢)

١- خلايا الصف الثانى فى الحل المبدئى تكون على النحو التالى :

ا	ب	ج	د
أ٢ ب١ ٢٠٠ ا٢ ب٢ ١٢٠٠ ا٢ ب٣ ٨٠٠	أ٢ ب١ ٨٠٠ ا٢ ب٢ ١٢٠٠ أ٢ ب ٣ صفر	أ٢ ب١ ١٢٠٠ أ٢ ب٢ صفر أ٢ ب٣ ٨٠٠	لا شيء مما سبق

٢- خلايا العمود الثانى فى الحل المبدئى تكون على النحو التالى :

ا	ب	ج	د
أ١ ب٢ ٢٠٠ ا٢ ب٢ ١٢٠٠ ا٣ ب٢ صفر	أ١ ب٢ صفر ا٢ ب٢ ١٢٠٠ أ٣ب٢ ٢٠٠	أ١ ب٢ ١٢٠٠ أ٢ ب٢ صفر أ٣ ب٢ ٢٠٠	لا شيء مما سبق

٣- خلايا العمود الاول فى الحل المبدئى تكون على النحو التالى :

ا	ب	ج	د
أ١ ب١ ٨٠٠ ا٢ ب١ صفر ا٣ ب١ ٨٠٠	أ١ ب١ ٨٠٠ ا٢ ب١ ٨٠٠ أ٣ب١ صفر	أ١ ب١ ٨٠٠ أ٢ ب١ صفر أ٣ ب١ صفر	لا شيء مما سبق

٤- تكلفة النقل وفقا لجدول الحل المبدئى تكون :

ا- ٣٤٢٠٠ ج ب- ٣٦٠٠٠ ج ج- ٤٠٢٠٠ ج د- ٣٠٢٠٠ج.

٥- يترتب على ادخال الخلية أ١ب٢ فى الحل المبدئى لتحسينة :

أ- زيادة التكلفة ٣ ج للوحدة ب- نقص التكلفة ٢ ج للوحدة

ج- نقص التكلفة ٣ ج للوحدة د- زيادة التكلفة ٤ ج للوحدة

٦- يترتب على ادخال الخلية أ١ب٣ فى الحل المبدئى لتحسينه :

أ- نقص التكلفة ٨ ج للوحدة ب- نقص التكلفة ٢ ج للوحدة

ج- نقص التكلفة ١٠ ج للوحدة د- زيادة التكلفة ٨ ج للوحدة

٧- يترتب على ادخال الخلية أ٢ب٣ فى الحل المبدئى لتحسينه :

أ- نقص التكلفة ٩ ج للوحدة ب- نقص التكلفة ٣ ج للوحدة

ج- نقص التكلفة ٥ ج للوحدة د- زيادة التكلفة ٩ ج للوحدة

٨- الحل المبدئى لمشكلة النقل السابق عرضها يعتبر حل :

ا- امثل وحيد ب- حل امثل غير وحيد

ج- غير امثل يجب تحسينه د- لا يمكن تحسينه

٩- لتحسين الحل المبدئى لمشكلة النقل السابق عرضها يتم ملء الخلية :

ا- أ١ ب٣ ب٨٠٠ وحدة ب- أ١ب٣ ب ١٠٠٠ وحدة

ج- أ٢ب٣ ب ٢٠٠ وحدة د- أ٢ ب٣ ب ١٠٠٠ وحدة

١٠ – فى حالة ملء الخلية أ٢ب٣ فان جملة تكلفة النقل سوف :

أ- تقل بمبلغ ٩٠٠٠ ج ب- تزيد بمبلغ ٩٠٠٠ ج

ج- تقل بمبلغ ٤٠٠ ج د- تقل بمبلغ ٧٢٠٠ ج

١١- فى حالة ملء الخلية أ١ب٣ فان جملة تكلفة النقل سوف :

أ- تزيد بمبلغ ٦٤٠٠ ج ب- تقل بمبلغ ٦٤٠٠ ج

ج- تقل بمبلغ ٨٠٠٠ ج د- تزيد بمبلغ ٨٠٠٠ ج

١٢- فى حالة ملء الخلية أ٢ب٣ فان اجمالى تكلفة النقل تكون :

ا- ٢٥٢٠٠ ج ب- ٤٣٢٠٠ ج ج- ٣٣٨٠٠ ج د- ٢٧٠٠٠ ج

النموذج الثاني

تمتلك شركة الامل ثلاثة مخازن (أ١ ، أ٢ ، أ٣)وتوزع منتجاتها فى ثلاث مناطق (ب ١ ، ب٢، ب٣) وتبلغ الطاقة الانتاجية للمخازن ٢٩٠٠ ، ٢٠٠٠ ،١١٠٠ وحدة على الترتيب فى حين تقدر الطاقة التسويقية لمناطق التوزيع ٢٥٠٠، ٣٠٠٠ ،٥٠٠ وحدة على الترتيب ، وكانت تكلفة نقل للوحدة بالجنيه من كل مخزن الى كل منطقة توزيع كما يلى:

من ----الى	ب ١	ب ٢	ب٣
أ١	٣	٧	٢
أ ٢	٢	٥	٥
٣ ا	٧	٢	٤

فاذا علمت أن الشركة تتبع طريقة الركن الشمالى الشرقى فى اعداد جدول الحل المبدئى ،واختبار المثالية بطريق حجر الوطء فأن : (أجب على الأسئلة من ١ الى ١٠)

١- خلايا الصف الاول فى الحل المبدئى تكون على النحو التالى :

ا	ب	ج	د
أ١ ب١ ٢٥٠٠ ا١ ب٢ ٤٠٠ ا١ ب٣ صفر	أ١ب١ صفر ا١ ب٢ ٤٠٠ أ١ ب ٣ ٢٥٠٠	أ١ ب١ ٢٩٠٠ أ١ ب٢ صفر أ١ ب٣ صفر	أ١ب١ ٢٥٠٠ ا١ب٢ صفر ا١ ب٣ ٤٠٠

٢ - خلايا العمودالثالث فى الحل المبدئى تكون على النحو التالى :

ا	ب	ج	د
أ١ ب٣ ٥٠٠ ٢١ ب٣ صفر ٣١ ب٣ صفر	أ١ ب٣ صفر ٢١ ب٣ صفر أ٣ب٣ ٥٠٠	أ١ ب٣ ٤٠٠ أ٢ ب٣ ١٠٠ أ٣ ب٣ صفر	١١ ب٣ صفر أ٢ ب٣ ٢٠٠ أ٣ ب٣ ٣٠٠

٣- خلايا العمودالثانى فى الحل المبدئى تكون على النحو التالى :

ا	ب	ج	د
أ١ ب٢ ٤٠٠ ٢١ ب٢ ٢٠٠٠ ٣١ ب٢ ٦٠٠	أ١ ب٢ ٢٥٠٠ ٢١ ب٢ ٣٠٠ أ٣ب٢ ٢٠٠	أ١ ب٢ ٢٠٠٠ أ٢ ب٢ ٢٠٠ أ٣ ب٢ ٨٠٠	١١ ب٢ ٢٩٠٠ أ٢ ب٢ ١٠٠ أ٣ ب٢ صفر

٤ ـ تكلفة النقل طبقا لجدول الحل المبدئى تكون :

ا- ٣٢٢٠٠ ج   ب- ٣٦٠٠٠ ج   ج- ٢٣٥٠٠ ج   د- ٢١٩٠٠ ج

٥-- يترتب على ادخال الخلية أ٣ب١ فى الحل المبدئى لتحسينه :

أ- زيادة التكلفة ٨ج للوحدة   ب- نقص التكلفة ٩ج للوحدة

ج- نقص التكلفة ٨ ج للوحدة   د- زيادة التكلفة ٧ج للوحدة

٦- يترتب على ادخال الخلية أ١ب٣ فى الحل المبدئى لتحسينه:

أ- زيادة التكلفة ٥ج للوحدة   ب- نقص التكلفة ٧ج للوحدة

ج- نقص التكلفة ٥ ج للوحدة   د-زيادة التكلفة ٧ج للوحدة

٧ --في حالة ملء الخلية أ٢ب٣ ينقل اليها :

ا- ١٠٠٠ وحدة ب- ٥٠٠ وحدة ج-٦٠٠ وحدة د- ٢٠٠٠ وحدة

٨- لتحسين الحل المبدئى للمشكلة السابق ذكرها يتم ملء الخلية :

أ-أ٢ب١ ب- أ٣ ب١ ج- أ٢ب٣ د- أ١ ب٣

٩ - فى حالة ملء الخلية أ١ب٣ فان جملة تكلفة النقل تصبح :

أ- ٢٠٧٠٠ ج ب- ٢٦٣٠٠ج ج- ٢٠٠٠٠ ج د- ٢٧٠٠٠ ج

١٠- إذاكان عدد الصفوف فى احدى مشكلات التعيين ٤ صفوف فان الحل يكون أمثل إذاكانت هناك خلايا صفرية مستقلة عددها :

أ - ٣ خلايا ب- ٨ خلايا ج- ٤ خلايا فاكثر د- خليتان

الفصل التاسع

أسلوب تقييم ومراجعة البرامج (بيرت)

أولاً: أسئلة نظرية:

أ - لكل سؤال من الأسئلة التالية عدة إجابات، والمطلوب تحديد الإجابة الصحيحة منها:

١ - من بين جميع المسارات على شبكة بيرت فإن المسار الحرج:

أ – له أكبر وقت متوقع. ب- له أقل وقت متوقع.

ج- له أكبر وقت عادي. د - له أقل وقت عادي.

٢ - أنشطة المسار الحرج يكون لها:

أ – أقل وقت راكد كلي. ب- أقل وقت راكد حر.

ج- أكبر وقت راكد حر. د – لا شئ مما سبق.

٣ - وقت البداية المبكر لنشاط يبدأ عند الحدث (٥) يكون:

أ- أكبر وقت نهاية مبكر لجميع الأنشطة التي تنتهى عند الحدث رقم (٥).

ب- يساوي وقت النهاية المبكر لنفس النشاط مطروحاً منه الوقت المتوقع للنشاط.

ج- يعتمد على جميع المسارات التي تبدأ من البداية وتنتهى عند الحدث (٥).

د- كل ما سبق.

٤ - الوقت الراكد الكلي للنشاط (س):

أ- يساوي وقت النهاية المبكر – وقت البداية المبكر للنشاط (س).

ب- يساوي وقت النهاية المتأخر – وقت البداية المبكر للنشاط (س)

ج- يساوي وقت البداية المتأخر – وقت البداية المبكر للنشاط (س)

د- لا شئ مما سبق.

٥ - وقت النهاية المتأخر لأي نشاط ينتهى عند الحدث (٣):

أ- يساوي أكبر أوقات البداية المتأخرة لجميع الأنشطة التي تخرج من هذا الحدث.

ب- يعتمد على وقت النهاية المتأخرة للمشروع.

ج- يساوي وقت البداية المتأخر – وقت النشاط.

د- لا شئ مما سبق.

٦ - تقدير الوقت المتوقع للنشاط في شبكة بيرت:

أ- يقوم على أساس ثلاثة تقديرات للوقت.

ب- يضع أكبر وزن للتقدير الأكثر احتمالاً للوقت.

ج- يحسب بالاستعانة بتوزيع بيتا. د - كل ما سبق.

٧ - تقدير احتمال إتمام المشروع خلال ٢٠ اسبوع:

أ- يفترض أن أوقات الأنشطة مستقلة إحصائياً.

ب- يفترض أن الوقت الكلي للمسار الحرج يعتمد على تقريب توزيع بيتا.

ج- يتطلب معلومات عن الانحراف المعياري لجميع الأنشطة على شبكة بيرت.

د- كل ما سبق.

٨ - التكلفة الحدية للإسراع في التنفيذ يمكن أن تتغير عندما:

أ- ينتهى الوقت المسموح به لتخفيض وقت النشاط المراد تخفيض وقته.

ب- عندما يظهر مسار حرج جديد.

ج- (أ ، ب). د - لا شئ مما سبق.

٩ - أسلوب بيرت / تكلفة يفترض أن:

أ- كل نشاط يتحقق في وقته المتفائل.

ب- التكاليف توزع بشكل متساوى وطبيعي على وقت إتمام النشاط.

ج- أوقات الأنشطة مستقلة إحصائية. د - لا شئ مما سبق.

١٠- الراكد الحر لوقت النشاط يساوي:

أ- بداية مبكرة – نهاية مبكرة + طول النشاط.

ب- نهاية مبكرة – بداية مبكرة – طول النشاط.

ج- بداية متأخرة – بداية مبكرة – طول النشاط.

د- لا شئ مما سبق.

ب- حدد صحة أو خطأ العبارات التالية:

١ - تعطي طريقة الركن الشمالي الشرقي أقل تكلفة نقل للحل المبدئي

٢ - تصلح طريقة حجر الوطء لاختبار الحل المبدئي المعد وفقاً لطريقة فوجل التقريبية فقط

٣ - يلزم في جميع مشاكل النقل تساوي عدد المصادر مع عدد المنافذ حتى يتوافر شرط التوازن

٤ - تختلف تكلفة الفرصة للخلايا الفارغة باختلاف قيم الصفوف والأعمدة والتي تختلف بدورها باختلاف الصف أو العمود الذي يفترض أن قيمته صفر عند اختبار المثالية بطريقة التوزيع المعدل.

٥ - إذا اكتمل صف وعمود في وقت واحد عند تطبيق طريقة فوجل التقريبية لإعداد الحل المبدئي يتم حذفهما معاً للتوصل إلى الحل المبدئي بصورة أسرع

٦ - الخلايا الفارغة في الصف أو في العمود الصوري تؤخذ في الاعتبار عند اختبار مثالية الحل.

٧ - لايتأثر جدول الحل سواء كان عدد خلايا المسار المغلق للخلية المراد شغلها زوجي أو فردي.

٨ - حيث أن مشاكل النقل تعتبر نوعاً خاصاً من مشاكل البرمجة الخطية، فإنه وفقاً لخاصية التتابعية فإن كل جدول حل في مشاكل تعظيم الأرباح يعطي أرباحا تساوي أرباح الجدول السابق له أو تزيد عنها.

٩ - في مشاكل التعيين يمكن أن تكون القيمة التي تعين لأي خلية أكبر من واحد صحيح ولكن لا يصح أن تكون أقل من واحد صحيح.

١٠- كل مشكلة تعيين لها حل بطريقة التعيين يكون لها حل بطريقة السمبلكس.

ثانياً: حالات عملية:

الحالة الأولى:

تخطط شركة العز للمقاولات لأحد مشروعاتها العقارية، وأسفرت دراسة تقدير الوقت والتكلفة لهذا المشروع عن الآتى: (الأوقات بالأسبوع):

النشاط	ا	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط	ى
مسار النشاط	١-٢	١-٣	٢-٣	٢-٤	٣-٤	٣-٥	٤-٥	٤-٦	٥-٦	٦-٧
الوقت المتفائل	٢	٧	٥	٨	٤	٧	٥	١٠	٤	٢
الوقت المتشائم	١٢	٢١	١٩	٤٤	٦	٧٥	٧	٦٠	١٨	٢٦
الوقت الأكثر إحتمالا	٤	٨	٦	١٧	٥	٢٠	٦	٢٠	٨	٨

المطلوب:

١- تحديد الوقت المتوقع لكل نشاط.

٢- رسم شبكة الأعمال بيرت، موضحا عليها الوقت المتوقع لكل نشاط والوقت المبكر والمتأخر لكل حدث والمسار الحرج.

٣- حساب الوقت الراكد الكلى لكل الأنشطة.

٤- حساب الإنحراف المعيارى لوقت المشروع.

٥- حساب إحتمال إتمام المشروع بموازنة إجمالية قدرها ٧٠٠٠٠ج، علما بأن متوسط تكلفة تنفيذ المشروع فى الأسبوع الواحد يبلغ ١٠٠٠ج.

للإسترشاد:

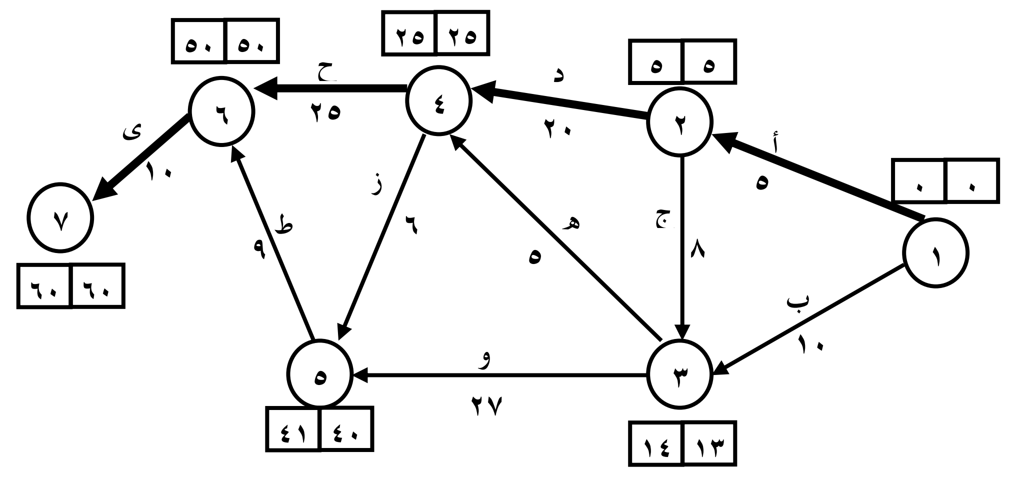
الدرجة المعيارية ق	٠,٣٤	٠,٥٩	٠,٨٩	٠,٩٩	١,٢٩
القيمة المقابلة	٠,١٣٣١	٠,٢٢٢٤	٠,٣١٣٣	٠,٣٣٨٩	٠,٤٠١٥

الحل

١ – تحديد الوقت المتوقع لكل نشاط:

النشاط	الوقت المتوقع = (ف + ٤ح + ش) / ٦
أ	٥
ب	١٠
ج	٨
د	٢٠
هـ	٥
و	٢٧
ز	٦
ح	٢٥
ط	٩
ى	١٠

٢ - رسم الشبكة:



المسارات:

أ د ح ى : ٦٠

أ د ز ط ى : ٥٠

أ ج هـ ح ى : ٥٣

أ ج و ط ى : ٥٩

أ ج هـ ز ط ى : ٤٣

ب هـ ج ى ز : ٥٠

ب هـ ز ط ى : ٤٠

ب و ط ى : ٥٦

٣ – حساب الوقت الراكد الكلي:

النشاط (١)	الوقت المتوقع (٢)	وقت مبكر لحدث البداية (٣)	وقت مبكر لحدث النهاية (٢+٣) (٤)	وقت متأخر لحدث البداية (٦-٢) (٥)	وقت متأخر لحدث النهاية (٦)	الوقت الراكد الكلي ٦-٤ أو ٥-٣ (٧)
أ	٥	٠	٥	٠	٥	٠
ب	١٠	٠	١٠	٤	١٤	٤
ج	٨	٥	١٣	٦	١٤	١
د	٢٠	٥	٢٥	٥	٢٥	٠
هـ	٥	١٣	١٨	٢٠	٢٥	٧
و	٢٧	١٣	٤٠	١٤	٤١	١
ز	٦	٢٥	٣١	٣٥	٤١	١٠
ح	٢٥	٢٥	٥٠	٢٥	٥٠	٠
ط	٩	٤٠	٤٩	٤١	٥٠	١
ى	١٠	٥٠	٦٠	٥٠	٦٠	٠

٤ – الانحراف المعياري لأنشطة المسار الحرج:

أ - ٥ ÷ ٣

د - ٣٦ ÷ ٦ = ٦

ح - ٢٥ ÷ ٣

ى - ٤

الانحراف المعياري لوقت المشروع = $\sqrt{(\frac{٥}{٣})^{٢} + ٣٦ + (\frac{٢٥}{٣})^{٢} + ١٦}$

$= \sqrt{(\frac{٥}{٣})^{٢} + ٥٢ + (\frac{٢٥}{٣})^{٢}}$

$= \sqrt{٢,٧٨ + ٥٢ + ٦٩,٤٤}$

$= \sqrt{١٢٤,٢٢} = ١١,١٤٥٤$

قيمة Z = $\frac{٧٠ - ٦٠}{١١,١٤٥٤}$ = ٠,٨٩٧٢٣ وبالبحث في الجداول الرقم المقابل ٠,٨١٣٣

الوقت المطلوب = ٧٠٠٠٠ ÷ ١٠٠٠ = ٧٠ أسبوعاً

∴ احتمال تنفيذ المشروع في الوقت المستهدف ٨١% تقريباً.

الحالة الثانية:

فيما يلى تقديرات الوقت (بالأسبوع) الخاصة بأنشطة أحد المشروعات التى عهد لشركة الحسن الصناعية بتنفيذها:

النشاط	أ	ب	ج	د	هـ	و	ز
مسار النشاط	١-٢	١-٣	٢-٤	٣-٤	٣-٥	٤-٦	٥-٦
الوقت المتفائل	٩	٧	٨	١٤	٨	٧	١٢
الوقت الأكثر إحتمالا	١٥	١٣	١٢	١٦	١٢	١١	٢٠
الوقت المتشائم	٢١	١٩	١٦	٢٠	٣٤	١٥	٥٨

المطلوب:

١- حساب الوقت المتوقع لكل نشاط.

٢- رسم شبكة بيرت مبينا" عليها الوقت المبكر والمتأخر والمسار الحرج.

٣- تحديد الأنحراف المعيارى لوقت المشروع.

الفصل العاشر

إستخدام نموذج بيرت فى تخفيض التكاليف

بيرت / تكلفة

الحالة الأولى:

قدمت إليك البيانات التالية الخاصة بأنشطة تنفيذ أحد المشروعات:

(الأوقات بالأسبوع ، التكلفة بالجنيه):

النشاط	المسار	عادى		متسرع	
		وقت	تكلفة	وقت	تكلفة
أ	١ ــ ٢	١٤	٣٠٠٠	١٠	٤٠٠٠
ب	١ ــ ٣	٣٥	٧٠٠٠	٣٠	٩٤٠٠
ج	٢ ــ ٣	١٢	٤٠٠٠	١٠	٦٠٠٠
د	٣ ــ ٤	١٣	٨٠٠٠	٩	٨٨٠٠
هـ	٢ ــ ٥	٥	٢٠٠٠	٣	٣٦٠٠
و	٤ ــ ٥	٧	٩٠٠٠	٥	١٠٦٠٠
ز	٤ ــ ٦	٨	٢٥٠٠	٥	٣٧٠٠
ح	٥ ـ ٦	٩	٣٥٠٠	٣	٤١٠٠

المطلوب:

١- رسم شبكة الأعمال "بيرت" طبقا للوقت العادى مع بيان الوقت المبكر والمتاخر والمسار الحرج والراكد الحر عليها.

٢- تحديد الوقت الراكد الكلى والراكد الحر لجميع الأنشطة.

٣- حساب تكلفة إتمام المشروع في وقته العادي.

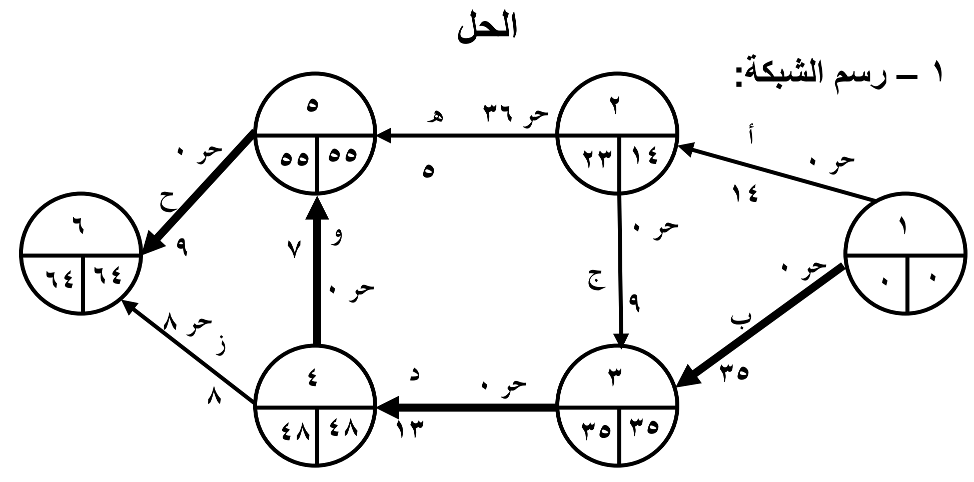
٤- حساب تكلفة تنفيذ المشروع فى ٥٠ أسبوعا" فقط .

٥- حساب تكلفة إتمام المشروع خلال ٥٦ أسبوع.

٦- حساب تكلفة إتمام المشروع بموازنة إجمالية ٤٠٣٠٠ج.

الحل

١ – رسم الشبكة:



المسارات:

أ هـ ح	:	٢٨	أ ج د ز	:	٥٥
أ ج د ز	:	٤٧	ب د و ح	:	٦٤ ⟵
ب د ز	:	٥٦			

٢ – الوقت الراكد الكلي والراكد الحر:

النشاط	المسار	الوقت المتوقع	وقت مبكر لحدث البداية	وقت مبكر لحدث النهاية	وقت متأخر لحدث البداية	وقت متأخر لحدث النهاية	الوقت الراكد الكلي	الراكد الحر
أ	١-٢	١٤	٠	١٤	٩	٢٣	٩	٠
ب	١-٣	٣٥	٠	٣٥	٠	٣٥	٠	٠
ج	٢-٣	١٢	١٤	٢٦	٢٣	٣٥	٩	٩
د	٣-٤	١٣	٣٥	٤٨	٣٥	٤٨	٠	٠
هـ	٢-٥	٥	١٤	١٩	٥٠	٥٥	٣٦	٣٦
و	٤-٥	٧	٤٨	٥٥	٤٨	٥٥	٠	٠
ز	٤-٦	٨	٤٨	٥٦	٥٦	٦٤	٨	٨
ح	٥-٦	٩	٥٥	٦٤	٥٥	٦٤	٠	٠

٣ – تكلفة إتمام المشروع في وقته العادي =

مجموع التكلفة العادية لجميع الأنشطة أي ٣٩٠٠٠ج

٤ – حساب تكلفة تنفيذ المشروع في ٥٠ أسبوع:

أ – جدول ميل التكلفة

النشاط	ميل التكلفة (تكلفة متسرعة – تكلفة عادية) ÷ (وقت عادي – وقت متسرع)	حدود التخفيض (وقت عادي – وقت متسرع)
أ	٢٥٠	٤
ب	٤٨٠	٥
ج	١٠٠٠	٢
د	٢٠٠	٤
هـ	٨٠٠	٢
و	٨٠٠	٢
ز	٤٠٠	٣
ح	١٠٠	٦

ب – جدول يوضح مراحل وتكاليف التخفيض:

مراحل التخصيص	١	٢	٣	٤
المسارات	لاتعجيل	ح	د	ب
أ هـ ح	٢٨	٢٢	٢٢	٢٢
أ ج د ح	٤٧	٤١	٣٧	٣٧
أ ج د و ح	٥٥	٤٩	٤٥	٤٥
ب د ز	٥٦	٥٦	٥٢	٤٨
ب د و ح	٦٤	٥٨	٥٤	٥٠
ت. إضافية	صفر	٦٠٠	٨٠٠	١٩٢٠
تكلفة إضافية متجمعة	صفر	٦٠٠	١٤٠٠	٣٣٢٠

- التكلفة الإضافية لإتمام المشروع في ٥٠ أسبوع =

مجموع التكلفة الإضافية لمراحل التخفيض حتى ٥٠ اسبوع

أي ٣٣٢٠ ج

- تكلفة إتمام المشروع خلال ٥٠ أسبوع =

التكلفة العادية لإتمام المشروع في وقته العادي + التكلفة الإضافية المتجمعة عند ٥٠ أسبوع

= ٣٩٠٠٠ + ٣٣٢٠ = ٤٢٣٢٠ ج

٥ – تكلفة إتمام المشروع خلال ٥٦ أسبوع:

عند الخطة (٣) تم تخفيض النشاط (د) ٤ أسابيع فيكتفي بتخفيض النشاط (د) بأسبوعين فقط بتكلفة إضافية ٤٠٠ج وبذلك تكون التكلفة المتجمعة ٦٠٠ + ٤٠٠ = ١٠٠٠ ج

∴ تكلفة إتمام المشروع خلال ٥٦ أسبوع تكون:

٣٩٠٠٠ج + ١٠٠٠ = ٤٠٠٠٠ ج

٦ – ما هو وقت إتمام المشروع بموازنة إجمالي ٤٠٠٣٠ج

التكلفة الإضافية المتاحة = ٤٠٠٣٠ – ٣٩٠٠٠ = ١٠٣٠ج

أي عند ٥٦ أسبوع ويتبقى من الموازنة ٣٠ ج.

الحالة الثانية:

يوضح الجدول التالى أوقات وتكاليف الأنشطة اللازمة لتنفيذ أحد المشروعات: (الأوقات بالأسبوع والتكاليف بالجنيه) :

النشاط	أ	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح
المسار	١-٢	٢-٣	٢-٤	٣-٥	٤-٥	٤-٦	٥-٦	٦-٧
الوقت العادى	١٠	٩	٦	٧	٩	٥	٤	٧
التكلفة العادية	٧٠٠٠	١٨٠٠٠	١٨٠٠٠	٣٥٠٠	٥٤٠٠	٥٠٠٠	٨٠٠٠	٨٠٠٠
الوقت المتسرع	٩	٦	٣	٤	٧	٥	٤	٥
التكلفة المتسرعة	٧٤٠٠	٢٠٤٠٠	٢٤٠٠٠	٦٥٠٠	٧٠٠٠	٥٠٠٠	٨٠٠٠	١٢٠٠٠

المطلوب:

أ- رسم شبكة الأعمال "بيرت" وفقا للوقت العادى موضحا عليها الوقت المبكر والمتأخر لكل حدث.

ب- حساب تكلفة تنفيذ المشروع فى ٣١ أسبوعا".

نماذج أسئلة ذات اختيارات متعددة:

النموذج الأول

فيما يلى بيان بتقديرات الوقت (بالاسبوع)والتكلفة (بالجنيه)لانشطة مشروع صيانة احد مدرجات كلية التجارة

النشاط	الاحداث	الوقت العادى	الوقت المتسرع	التكلفة العادية	التكلفة المتسرعة
أ	١--٢	١٢	٨	٣٦٠٠	٤٦٠٠
ب	٢--٣	٢٠	٨	١٦٠٠٠	١٩٠٠٠
ج	٢--٤	١٦	٨	٤٨٠٠	٦٤٠٠
د	٣--٤	٤	٤	٤٠٠٠	٤٠٠٠
هـ	٣--٥	٨	٤	٣٠٠٠	٣٦٠٠
و	٤--٥	١٦	٨	٤٤٠٠	٧٠٠٠
اجمالى				٣٥٨٠٠	٤٤٦٠٠

على ضوء هذه البيانات اجب عن الاسئلة (من ١ الى ٩)

١ – المسار الحرج طبقا للوقت العادى هو:

ا- ا ،ب ،هـ   ب- أ ،ب ،د ،هـ   ج- أ ، ب ،د ، و   د- أ ،ج ،و

٢- الوقت المبكر للحدث (٤) يكون :

ا- ٢٨   ب- ٣٦   ج- ٣٢   د- صفر

٣- الوقت المتأخر للحدث (٣) يكون :

ا- ٤٤   ب- ٣٦   ج- ٣٢   د- لا شيء مما سبق

٤ – الوقت الراكد الحر للنشاط (هـ) يكون :

أ- ٢٠ اسبوع   ب- ١٢ اسبوع   ج- ٨ أسابيع   د- صفر اسبوع

٥ – ميل التكلفة للنشاط (هـ) :

ا- ١٥٠ ج   ب- ١٦٥٠ ج   ج- ٩٠٠ ج   د-٧٥٠ ج

٦ – تكلفة اتمام المشروع فى وقته العادى تكون:

ا- ٤٤٦٠٠ ج   ب- ٣٥٨٠٠ ج   ج- ٢٨٠٠٠ ج   د- ١٢٨٠٠ ج

٧ – التكلفة الاضافية لتخفيض وقت المشروع بمقدار ١٢ اسبوع تكون :

ا- ١٠٠٠ ج   ب-٣٠٠٠ ج   ج- ٣٨٨٠٠ج   د- ١٦٠٠ ج

٨ – التكلفة الاجمالية لاتمام المشروع خلال ٤٠ اسبوع تكون :

ا- ٣٨٨٠٠ج   ب-٢٧٠٠٠ ج   ج- ٤٧٦٠٠ ج   د- ٤٤٤٠٠ ج

٩ – التكلفة الاضافية لتخفيض وقت المشروع الى ٤٦ اسبوع تكون :

ا– ١٦٠٠٠ ج   ب– ١٥٠٠ ج   ج– ٣٠٠٠ ج   د– ٤٠٣٠٠ ج

١٠– اذاكان الوقت المتفائل للنشاط(س) ٧ اسابيع والوقت المتشائم ١٥ اسبوع والوقت الاكثر احتمالا ٨ اسابيع فان الوقت المتوقع يكون :

ا– ٣٠ اسبوع   ب– ٩ اسابيع   ج– ١٢.٥ اسبوع   د– ١٠ اسابيع

١١– اذاكان الانحراف المعيارى لوقت مشروع صيانة احد مدرجات كلية التجارة السابق الاشارة اليه ٣ والمعامل الثابت المقابل لدرجة ثقة ٩٠% كان ١.٢٨ انحراف معيارى فان الوقت المتوقع لاتمام هذا المشروع يكون :

ا– ٥٥.٨٤ اسبوع   ب–٧٠.٤ اسبوع   ج– ٤٨.١٦ اسبوع   د– ١٥٩.٨٤ اسبوع

النموذج الثاني

فيما يلى بيان بتقديرات الوقت (بالاسبوع)والتكلفة (بالجنيه)لانشطة مشروع صيانة احد مدرجات كلية التجارة

النشاط	الاحداث	الوقت العادى	الوقت المتسرع	التكلفة العادية	التكلفة المتسرعة
أ	١––٢	٦	٤	٧٠٠٠	٨٢٠٠
ب	١––٣	٩	٥	١٠٠٠٠	١٠٨٠٠
ج	٢––٣	٨	٤	٥٠٠٠	٦٦٠٠
د	٢––٤	٦	٢	٦٠٠٠	٨٠٠٠
هـ	٣––٤	٢	٢	٢٠٠٠	٢٠٠٠
و	٤––٥	٨	٤	٦٠٠٠	٦٦٠٠
ز	٣ ––٥	٤	٣	٨٠٠٠	٨١٠٠
الاجمالى				٤٤٠٠٠	٥٠٣٠٠

على ضوء هذه البيانات اجب عن الاسئلة (من ١ الى ٩)

١– المسار الحرج طبقا للوقت العادى هو:

أ– ا ،د ،و   ب– أ ،ج ،هـ ،و   ج– ب ،د ، و   د– أ ،ج ،ز

٢– الوقت المبكر للحدث (٤) يكون :

ا– ١٢   ب– ١٦   ج– ١١   د– ٢

٣– الوقت المتأخر للحدث (٣) يكون :

ا– ١٠   ب– ١٤   ج– ١٦   د– ٢٠

٤ – الوقت الراكد الحر للنشاط (ب) يكون :

أ– ١٤ اسبوع   ب– ٥ اسبوع   ج– ٩ أسابيع   د– صفر اسبوع

٥ – ميل التكلفة للنشاط(ز) :

ا- ١٠٠ ج ب- صفر ج ج- ١٥٠ ج د-٢٠٠ ج

٦ – تكلفة اتمام المشروع فى وقته العادى تكون:

ا- ٥٠٣٠٠ ب- ٤٤٠٠٠ ج ج- ٢٣٤٠٠ ج د- ٢٠٠٠٠ ج

٧ – التكلفة الاضافية لتخفيض وقت المشروع بمقدار ٤ اسابيع تكون :

ا- ٢٤٠٠ ج ب-٦٠٠ج ج- ٤٠٠ ج د- ١٦٠٠ ج

٨ – التكلفة الاجمالية لاتمام المشروع خلال ١٨ اسبوع تكون :

ا- ٤٤٠٠٠ ب-٥١٦٠٠ ج ج- ٤٥٤٠٠ ج د- ٤١٨٠٠ ج

٩ – التكلفة الاضافية لتخفيض وقت المشروع الى ١٦ اسبوع تكون :

ا- ٤١٨٠٠ ج ب- ١٦٠٠ ج ج- ٣٠٠٠ ج د- ٢٢٠٠ ج

١٠– انشطة المسار الحرج لها :

ا- اقل راكد حر ب- اكبر راكد حر ج- اقل راكد كلى د- لا شيء مما سبق

١١– اذا كان الانحراف المعيارى لوقت مشروع صيانة احد مدرجات كلية التجارة السابق الاشارة اليه اعلاه ٣ والمعامل الثابت المقابل لدرجة ثقة ٩٠% كان ١.٢٨ انحراف معيارى ، فان الوقت المتوقع لاتمام هذا المشروع يكون :

ا- ٧٥.٨٤ اسبوع ب-٢٨.٢٨ اسبوع ج- ٢٧.٨٤ اسبوع د- ١٩.١٦ اسبوع

١٢– اذا كان الوقت المتفائل لاحد الانشطة ٦ اسابيع والاكثر احتمالا ١٠ اسابيع والمتشائم ٣٠ اسبوع فان الانحراف المعيارى لوقت هذا النشاط يكون :

ا- ٤ ب- ٣.٣٣ ج- ١٠.٦٧ د- ١٢.٧

الفصل الحادي عشر

نظرية المباراة

حالات تطبيقية:

<u>الحالة الأولى:</u> عرضت عليك مصفوفة عوائد المباراة التالية بين المتنافسين س، و ص والتي تظهر على النحو التالي:

ص

س $$\begin{pmatrix} ١٨ & ١٦ \\ ١٢ & -٥ \end{pmatrix}$$

والمطلوب الإجابة علي الأسئلة التالية:

س١: هل مصفوفة عوائد المباراة تمثل مصفوفة عوائد مباراة ذات إستراتيجية مطلقة أم مختلطة؟

س٢: هل مصفوفة عوائد المباراة تمثل مصفوفة عوائد مباراة ثنائية صفرية أم تمثل مصفوفة عوائد مباراة متعددة الأطراف ؟

س٣: هل نتيجة المباراة تساوي (١٨ أو ١٦ أو ١٢أو -٥ أو لا شيء مما سبق؟

س٤: فسر عناصر مصفوفة عوائد المباراة .

س٥: ما هي القواعد الواجب إتباعها لتحديد أفضل إستراتيجية بالنسبة لمنافسي المباراة الثنائية الصفرية .

أ- بالنسبة للمتنافس الذي يلعب في الصفوف

ب- بالنسبة للمتنافس الذي يلعب في الأعمدة ؟

ج: القواعد الواجب إتباعها لتحديد أفضل إستراتيجية بالنسبة لمنافسي المباراة الثنائية الصفرية هي:

أ - بالنسبة للمتنافس الذي يلعب في الصفوف: يختار أسوأ نتائجه والتي تتمثل في أكبر قيمة سالبة في كل صف أو صفر أو أصغر قيمة موجبة في الصف في حالة عدم وجود أي قيمة سالبة بالصف حيث تمثل القيم السالبة مكسب

للمتنافس الذي يلعب في الأعمدة ، وكلما عظمت وكبرت القيمة السالبة لأن هذا يعنى زيادة مكسب المتنافس الذي يلعب في الأعمدة، وبالتالي زيادة خسائر المتنافس الذي يلعب في الصفوف ، وفي حالة عدم وجود قيم سالبة بالصف . وكانت كل قيم عناصره موجبة فإن أسوأ نتيجة بالنسبة للمتنافس الذي يلعب في الصفوف تكون أقل قيمة موجبة في هذه الحالة.

ب- بالنسبة للمتنافس الذي يلعب في الأعمدة: يختار أسوء نتائجه، والتي تتمثل في أكبر قيمة موجبة في كل عمود أو أصغر قيمة سالبة في العمود إذا كان العمود لا يحتوى علي أرقام سالبة فقط، ويفسر ذلك بأن القيمة في العمود تمثل مكسباً(ربحاً) بالنسبة للمتنافس الذي يلعب في الصفوف، وفي نفس الوقت خسارة للمتنافس الذي يلعب في الأعمدة. أما إذا كان كل قيم عناصر العمود سالبة فقط فإن أقل رقم سالب يمثل أدني ربح يمكن أن يحققه المتنافس الذي يلعب في الأعمدة.

ج- أن القيمة الأكبر في القيم التي تمثل أسوأ النتائج التي حصلت عليها في البند (ب) تمثل أفضل إستراتيجية للمتنافس الذي يلعب في الصفوف.

د - أن القيمة الأصغر في القيم التي تمثل أسوأ النتائج التي حصلت عليها في البند (ب) تمثل أفضل إستراتيجية للمتنافس الذي يلعب في الأعمدة.

هـ - تمثل قيمة المباراة الرقم الذي يلتقي عنده صف أفضل إستراتيجية بالنسبة للمتنافس الذي يلعب في الصفوف مع عمود أفضل إستراتيجية للمتنافس الذي يلعب في الأعمدة .

<u>الحالة الثانية:</u> يوضح الجدول التالي مصفوفة نتائج المباراة الخاصة باللاعبين س ، وص، جدول رقم (١) بيانات مصفوفة المكاسب (نتائج وعوائد) اللاعب س

إستراتيجيات اللاعب ص / إستراتيجيات اللاعب س	ص١	ص٢	ص٣	ص٤
س١	٣٣	٢	١٥	٦١
س٢	٢٤ -	٥٧-	٢١-	٩١
س٣	٢١	٧٨-	٣٠	٦٥

والمطلوب: إيجاد نقطة التلاقي أي قيمة المباراة .

الحل:

مصفوفة المكاسب (نتائج وعوائد) اللاعب س

	ص١	ص٢	ص٣	ص٤
	٣٣	٢	١٥	٦١
	-٢٤	-٥٧	-٢١	٩١
	٢١	-٧٨	٣٠	٦٥

أصغر مفردة في الصف الأول ٢ أكبر مفردة في العمود الأول ٤٥

أصغر مفردة في الصف الثاني -٥٧ أكبر مفردة في العمود الثاني ٢

أصغر مفردة في الصف الثالث -٧٨ أكبر مفردة في العمود الثالث ٣٠

أكبر مفردة في العمود الرابع ٩١

وعلي ذلك يتمثل حل المباراة في اختيار الصف الأول للاعب س والعمود الثاني للاعب ص ، وتكون قيمة المباراة أو نقطة التلاقي تساوي ٢ .

س٨: يوضح الجدول التالي بيانات مصفوفة عوائد المباراة من وجهة نظر الشركة س.

جدول بيانات مصفوفة المكاسب (نتائج أو عوائد) اللاعب س

إستراتيجيات اللاعب ص / إستراتيجيات اللاعب س	ص١	ص٢	ص٣
س١	-٤	٨	١٠
س٢	٠	-٦	١٢٠
س٣	-١٠	٢	-١٢

والمطلوب: إيجاد قيمة المباراة .

مصفوفة المكاسب (نتائج أو عوائد) اللاعب س

ص

س		ص١	ص٢	ص٣
	س١	-١٠	٢	-١٢
	س٢	٠	-٦	١٢٠
	س٣	-٤	٨	١٠

- بمقارنـة عناصر الصف الثالث س٣ (الإستراتيجية الثالثة س٣) بعناصر الصف الأول س١ (الإستراتيجية الأولي س١) يتضح أن الإستراتيجية الأولي س١ مسيطر عليها ويجب استبعادها من مصفوفة نتائج أو عوائد المباراة باعتبارها إستراتيجية رديئة غير جيدة وغير مربحة ومخسرة لتظهر المصفوفة المصغرة بعد استبعاد الصف الأول علي النحو التالي:

ص

	ص١	ص٢	ص٣
س٢	٠	-٦	١٢٠
س٣	-٤	٨	١٠

- وباستخدام بيانات مصفوفة عوائد المباراة المصغرة أعلاه وتطبيق قواعد السيطرة علي إستراتيجيات الشركة ص ، يتضح من مقارنة عناصر قيم العمود الثالث ص٣ (الإستراتيجية الثالثة ص٣ للشركة ص) بعناصر قيم العمود الثاني ص٢ (الإستراتيجية الثانية ص٢ للشركة ص) نجد أن الإستراتيجية الثالثة ص٣ للشركة ص رديئة و مخسرة وغير مربحة ومسيطر عليها ويجب استبعادها من مصفوفة عوائد المباراة ،أما الإستراتيجية الثانية ص٢ للشركة ص فتعد إستراتيجية مسيطرة ومفضلة لتظهر مصفوفة نتائج أو عوائد المباراة بعد تطبيق خطوة السيطرة هذه علي النحو التالي:

ص

		ص١	ص٢
س	س٢	٠	-٦
	س٣	-٤	٨

- ولإيجاد نقطة التلاقي يتم اختيار الأتي :

أصغر مفردة في الصف الأول -٦ أكبر مفردة في العمود الأول ٠

أصغر مفردة في الصف الثاني -٤ أكبر مفردة في العمود الثاني ٨

ونظراً لأن أكبر مفردة في العمود الأول تساوي = ٠ لا تمثل أصغر مفردة في صفها، وأيضاً ونظراً لأن أكبر مفردة في العمود الثاني تساوي = ٨ لا تمثل أصغر مفردة في صفها، فلا توجد نقطة تلاقي للمباراة ، نظر لأننا أمام

مصفوفة عوائد مباراة ليست ذات استراتيجيات مطلقة وإنما نحن أمام مصفوفة عوائد مباراة ذات استراتيجيات مختلطة . ويمكن حلها بتطبيق خطوات حل الطريقة الحسابية السابق عرضها نصل إلي احتمالي اختيار كل إستراتيجية من الإستراتيجيتين بكل شركة وأيضاً القيمة المتوقعة لعوائد المباراة من وجهة نظر كل شركة من الشركتين س ، وص والتي تظهر بالجدول التالي:

الشركة س	القيمة	الشركة ص	القيمة
احتمال اختيار الإستراتيجية الأولي $س_٢$	٠,٦٦٧	احتمال اختيار الإستراتيجية الأولي $ص_١$	٠,٢٢٢
احتمال اختيار الإستراتيجية الأولي $س_٣$	٠,٣٣٣	احتمال اختيار الإستراتيجية الأولي $ص_٢$	٠,٧٧٨
قيمة المباراة	٠,٦٦٧	قيمة المباراة	٠,٦٦٧

<u>الحالة الثالثة:</u> يوضح الجدول التالي بيانات مصفوفة النتائج الخاصة من وجهة نظر الشركة س

جدول بيانات مصفوفة المكاسب (نتائج وعوائد) اللاعب س

إستراتيجيات اللاعب ص / إستراتيجيات اللاعب س	$ص_١$	$ص_٢$	$ص_٣$	$ص_٣$	$ص_٣$
$س_١$	٥	١٠٠	٢٥٠	-٢٠	-٤٠
$س_٢$	٠	٤٥٠	٦٠٠	٤٥	٥٠

والمطلوب:

إيجاد قيمة المباراة باستخدام قواعد السيطرة وأسلوب المباريات الفرعية.

لتحديد قيمة المباراة باستخدام قواعد السيطرة وأسلوب المباريات الفرعية نتبع الآتي:

١- إعداد مصفوفة عوائد المباراة :

		ص				
		$ص_1$	$ص_2$	$ص_3$	$ص_4$	$ص_5$
س	$س_1$	٥	١٠٠	٢٥٠	-٢٠	-٤٠
	$س_2$	٠	٤٥٠	٦٠٠	٤٥	٥٠

أ – بتطبيق قواعد السيطرة:

- وباستخدام بيانات مصفوفة عوائد المباراة أعلاه وتطبيق قواعد السيطرة علي إستراتيجيات الشركة ص، يتضح من مقارنة عناصر قيم العمود الثاني $ص_2$ (الإستراتيجية الثالثة $ص_2$ للشركة ص) بعناصر قيم العمود الأول $ص_1$ (الإستراتيجية الأولي $ص_1$ للشركة ص) نجد أن الإستراتيجية الثانية $ص_2$ للشركة ص مخسرة وغير مربحة ومسيطر عليها ويجب استبعادها من مصفوفة عوائد المباراة ،أما الإستراتيجية الأولي $ص_1$ للشركة ص فتعد إستراتيجية مسيطرة ومفضلة لتظهر مصفوفة نتائج أو عوائد المباراة بعد تطبيق خطوة السيطرة هذه علي النحو التالي:

		ص			
		$ص_1$	$ص_3$	$ص_4$	$ص_5$
س	$س_1$	٥	٢٥٠	-٢٠	-٤٠
	$س_2$	٠	٦٠٠	٤٥	٥٠

- وباستخدام بيانات مصفوفة عوائد المباراة أعلاه وتطبيق قواعد السيطرة علي إستراتيجيات الشركة ص ، يتضح من مقارنة عناصر قيم العمود الثاني $ص_3$ (الإستراتيجية الثالثة $ص_3$ للشركة ص) بعناصر قيم العمود الأول $ص_1$ (الإستراتيجية الأولي $ص_1$ للشركة ص) نجد أن الإستراتيجية الثالثة $ص_3$ للشركة ص مخسرة وغير مربحة ومسيطر عليها ويجب استبعادها من مصفوفة عوائد المباراة ،أما الإستراتيجية الأولي $ص_1$ للشركة ص فتعد إستراتيجية مسيطرة ومفضلة لتظهر مصفوفة نتائج أو عوائد المباراة بعد تطبيق خطوة السيطرة هذه علي النحو التالي: ص

$$\begin{array}{cc} & \text{ص} \\ & \begin{array}{ccc} \text{ص}_1 & \text{ص}_4 & \text{ص}_5 \end{array} \\ \text{س} \begin{array}{c} \text{س}_1 \\ \text{س}_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 5 & -20 & -40 \\ 0 & 45 & 50 \end{pmatrix} \end{array}$$

مما سبق يتضح أن قواعد السيطرة لم تؤدي إلي تصغير حجم مصفوفة عوائد المباراة إلي مصفوفة من صفين وعمودين [٢×٢] ، ولا يمكن تطبيق قواعد السيطرة علي أعمدتها لعدم توافر شرط قاعدتي السيطرة ، ولكي نحل هذه المباراة نجزأ ونقسم مصفوفة عوائد المباراة المتبقية إلي ثلاثة مباريات فرعية بحيث تتكون كل مباراة فرعية من صفين وعمودين [٢×٢] ، وتظهر هذه المباريات الفرعية الثلاثة علي النحو التالي:

المباراة الفرعية الأولي	المباراة الفرعية الثانية	المباراة الفرعية الثالثة
$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{ص}_1 & \text{ص}_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{س}_1 \\ \text{س}_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 5 & -20 \\ 0 & 45 \end{pmatrix} \end{array}$	$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{ص}_4 & \text{ص}_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{س}_1 \\ \text{س}_2 \end{array} & \begin{pmatrix} -20 & -40 \\ 45 & 50 \end{pmatrix} \end{array}$	$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{ص}_1 & \text{ص}_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{س}_1 \\ \text{س}_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 5 & -40 \\ 0 & 50 \end{pmatrix} \end{array}$

يلاحظ أن الشركة ص تتجاهل أحد الأعمدة الثلاثة ، حيث تتجاهل العمود الثالث في المباراة الفرعية الأولي ، وتتجاهل العمود الأول في المباراة الفرعية الثانية ، وتتجاهل العمود الثالث في المباراة الفرعية الثالثة. وتحل كل مباراة فرعية من المباريات الفرعية الثلاثة سواء كانت مباراة فرعية ذات إستراتيجية مطلقة أو مختلطة ، ويتم اختيار أصغر نتيجة لهذه المباريات الفرعية الثلاثة لتحديد نتيجة المباراة .

حل المباريات الفرعية

١- حل المباراة الفرعية الأولي بالطريقة الحسابية:

$$\begin{array}{cc} & \text{ص} \\ & \begin{array}{cc} \text{ص}_1 & \text{ص}_4 \end{array} \\ \text{س} \begin{array}{c} \text{س}_1 \\ \text{س}_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 5 & -20 \\ 0 & 45 \end{pmatrix} \end{array}$$

		ص		
		ص١	ص٤	
س	س١	٥	٢٠-	٢٥
	س٢	٠	٤٥	٤٥
		٥	٦٥	

		ص		
		ص١	ص٤	
س	س١	٥	٢٠-	٤٥
	س٢	٠	٤٥	٢٥
		٥	٦٥	

		ص		
		ص١	ص٤	
س	س١	٥	٢٠-	$\frac{٤٥}{٧٠}$
	س٢	٠	٤٥	$\frac{٢٥}{٧٠}$
		$\frac{٦٥}{٧٠}$	$\frac{٥}{٧٠}$	

		ص		
		ص١	ص٤	
س	س١	٥	٢٠-	$\frac{٩}{١٤}$
	س٢	٠	٤٥	$\frac{٥}{٧٠}$
		$\frac{١٣}{١٤}$	$\frac{١}{١٤}$	

قيمة المباراة = ق= ٥× $\frac{١٣}{١٤}$ + -٢٠ × $\frac{١}{١٤}$ = $\frac{٤٥}{١٤}$ = ٣ $\frac{٣}{١٤}$ = ٣,٢١٤

٢- حل المباراة الفرعية الثانية بالطريقة العادية نظراً لأنها مباراة ذات إستراتيجية مطلقة:

ص

س		$ص_{٤}$	$ص_{٥}$
	$س_{١}$	-٢٠	-٤٠
	$س_{٢}$	٤٥	٥٠

أصغر مفردة في الصف الأول -٤٠ أكبر مفردة في العمود الأول ٤٥

أصغر مفردة في الصف الثاني ٤٥ أكبر مفردة في العمود الثاني ٥٠

ونظراً لأن أكبر مفردة في العمود الأول تساوي = ٤٥ تمثل أصغر مفردة في صفها، فإن نقطة تلاقي المباراة (نتيجة المباراة) = ٤٥

١- حل المباراة الفرعية الثالثة بالطريقة الحسابية:

ص

س		$ص_{٤}$	$ص_{٥}$
	$س_{١}$	٥	-٤٠
	$س_{٢}$	٠	٥٠

ص

س		$ص_{١}$	$ص_{٤}$	
	$س_{١}$	٥	-٤٠	٤٥
	$س_{٢}$	٠	٥٠	٥٠
		٥	٩٠	

ص

س		$ص_{١}$	$ص_{٤}$	
	$س_{١}$	٥	-٤٠	٥٠
	$س_{٢}$	٠	٥٠	٤٥
		٩٠	٥	

$$
\begin{array}{cc|cc|c}
 & & \multicolumn{2}{c|}{ص} & \\
 & & ص_1 & ص_4 & \\
\hline
\multirow{2}{*}{س} & س_1 & 5 & -40 & \frac{50}{95} \\
 & س_2 & 0 & 50 & \frac{45}{95} \\
\hline
 & & \frac{90}{95} & \frac{5}{95} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc|cc|c}
 & & \multicolumn{2}{c|}{ص} & \\
 & & ص_1 & ص_4 & \\
\hline
\multirow{2}{*}{س} & س_1 & 5 & -40 & \frac{10}{19} \\
 & س_2 & 0 & 50 & \frac{9}{19} \\
\hline
 & & \frac{18}{19} & \frac{1}{19} &
\end{array}
$$

قيمة المباراة = ق= $5 \times \frac{18}{19} + -40 \times \frac{1}{19} = \frac{45}{14} = 2\frac{12}{19} = 2,362$

نتيجة المباراة الفرعية الأولي	نتيجة المباراة الفرعية الثانية	نتيجة المباراة الفرعية الثالثة
٣,٢١٤	٤٥	٢,٣٦٢

قيمة المباراة = ق= ٢,٣٦٢ = أصغر نتيجة مباراة فرعية وهي المباراة الفرعية الثالثة.

نماذج أسئلة ذات اختيارات متعددة

النموذج الأول

فيما يلى مصفوفة نتائج المباراة بين المتنافسين (س) و(ص) ، وعلى ضوء هذه المصفوفة فان :

ص

س ١١ ٥- ٦

١٠٨ ٧

٩٥ ٤

١- قيمة المباراة تكون :

ا- ٧ ب- ١٠ ج - ٥ د- (-١٠)

٢- افضل استراتيجية لكل من س ، ص على الترتيب :

ا- الاولى ، الاولى ب- الثانية ، الثانية ج- الثانية ، الثالثة د- الثالثة، الثانية

٣- المباراة التى تمثل المصفوفة السابقة نتائجها تعتبر مباراة ذات استراتيجية :

ا- مختلطة ب- مطلقة ج-فرعية د- لا شيء مما سبق .

٤- تعرف نقطة التلاقى بأنها :

ا- اكبر قيمة فى صفها وفى عمودها ب- اصغر قيمة فى عمودها واكبر قيمة فى صفها

ج- أصغر قيمة فى صفها واكبر قيمة فى عمودها د- أصغر قيمة فى صفها وفى عمودها

النموذج الثاني

فيما يلى مصفوفة نتائج المباراة بين المتنافسين (س) متنافس الصف و(ص) متنافس العمود ، وعلى ضوء هذه المصفوفة فان :

	ص	س
٢٤	٢٦	١٠-
٣٢	٢٨	٣٠
٩	١٠	٤٠

١- قيمة المباراة تكون :

ا- (-١٠) ب- ١٠ ج - ٢٠ د- ٢٨

٢- افضل استراتيجية لكل من س ، ص على الترتيب :

ا- الاولى ، الاولى ب- الثانية ، الثالثة ج- الثانية ، الاولى د- الثانية، الثانية

٣ – فى حالة تصغير مصفوفة نتائج المباراة السابقة باستخدام قوانين السيطرة فانها تصبح :

د		ج		ب		أ	
٢٤	٢٦	٢٨	٣٠	٢٤	١٠-	٣٢	٢٨
٣٢	٢٨	١٠	٤٠	٩	٤٠	٩	١٠

٤ – تعرف نقطة التلاقى بأنها :

ا– أصغر قيمة فى صفها و فى عمودها

ب–اكبر قيمة فى صفها واكبر قيمة فى عمودها

ج– اصغر قيمة فى عمودها واكبر قيمة فى صفها

د– أصغر قيمة فى صفها و اكبر قيمة فى عمودها

مراجع مختارة

- د. أحمد فؤاد عبد الخالق، *بحوث العمليات في المحاسبة*، دار الثقافة العربية،القاهرة، ١٩٨٩م.
- د. أحمد نور، *المحاسبة الإدارية وبحوث العمليات*، مركز الكتاب الجامعي، كلية التجارة، جامعة الإسكندرية، الإسكندرية، ٢٠٠٧م.
- د. حسين حسين شحاتة، *مقومات ومشاكل تطبيق منهج وأساليب بحوث العمليات في مجال المحاسبة: دراسة تحليلية ميدانية*، المجلة العلمية للاقتصاد والتجارة، كلية التجارة، جامعة عين شمس، ١٩٨٨م.
- د. حنفي زكي عيد، *المدخل الحديث في بحوث العمليات واستخداماتها في منظمات الأعمال: الكتاب الأول*، دار الثقافة العربية، القاهرة، ١٩٩٥م.
- د. دلال صادق بطرس، *بحوث العمليات في المحاسبة*، جهاز الكتب بكلية التجارة جامعة القاهرة، القاهرة، ٢٠٠٩م.
- د. سعيد محمود عرفه، *محاضرات في أساليب بحوث العمليات واستخداماتها في المحاسبة*، دار الإنسان، القاهرة، ١٩٧٥م.
- د. عبد المنعم فليح عبد الله، *بحوث العمليات في المحاسبة*، جهاز الكتب بكلية التجارة جامعة القاهرة، القاهرة، ٢٠٠٩م.
- د. محمد عبد العزيز أبو رمان، *البرمجة الخطية: النظرية والتطبيق*، كلية التجارة، جامعة طنطا، ١٩٨٩م.
- د. هالة عبد الله الخولي، *بحوث العمليات في المحاسبة*، جهاز الكتب بكلية التجارة جامعة القاهرة، القاهرة، ٢٠٠٤م.

-Ackoff, R.L. & M.W. Sasieni, (2009), *Fundamentals of Operations Research*, N.Y., John Wiley & Sons. Inc.

-Ackoff, R. L., Gupta S. K., and J. S. Minas, (2008), *Scientific Method: Optimizing Applied Research Decisions*, N.Y., John Wiley & Sons. Inc.

-Gillett, B. E.,(2003), *Introduction to Operations Research: A Computer Oriented Algorithmic Approach*, N.Y., John Wiley & Sons. Inc.

-Moghaddam, A. T. & Christian M., (2009), A Contribution to the Linear Programming Approach to Joint Cost Allocation: Methodology and Application, *European Journal of Operational Research*, (Sep.), Vol. 197, Iss. 3.

-Riggs, J. L. & M. S. Inoue, (2006), *Introduction to Operations Research and Management Science*, N.Y., McGraw – Hill Book Co.

-Shamblin, J. E. & G. T. Stevens, (2001), Operational Research: A Fundamental Approach, N.Y., McGraw – Hill Book Co.

-Wagner, H. M., (2006), *Principles of Operations Research: With Applications to Managerial Decisions*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, Inc., N.J.

-Yang, W.,(2008), *Advanced Linear Programming Methods for Spatial Forest Management*, M.A. Sc., Dalhousie University (Canada).

قائمة المحتويات

الموضوع	الصفحة
المقدمة	ج
الفصل الأول: الإطار العام لبحوث العمليات: المفاهيم والمبادئ	١
الفصل الثاني: الإطار العام لأسلوب البرمجة الخطية	٢٩
الفصل الثالث: الطريقة البيانية لحل نموذج البرمجة الخطية	٥١
الفصل الرابع: الطريقة العامة لحل نموذج البرمجة الخطية: طريقة السمبلكس حالة تعظيم الربحية	٦١
الفصل الخامس: الطريقة العامة لحل نموذج البرمجة الخطية: حالة تخفيض (تدنية) التكاليف	١٠٥
الفصل السادس: المشكلة الثنائية (المشكلة المقابلة) في البرمجة الخطية	١٢٥
الفصل السابع: تحليل حساسية نموذج البرمجة الخطية	١٣٩
الفصل الثامن: طرق النقل والتعيين	١٧٣
الفصل التاسع: أسلوب تقييم ومراجعة البرامج (بيرت)	٢٣١
الفصل العاشر: تخطيط ورقابة التكاليف باستخدام أسلوب بيرت	٢٥٥
الفصل الحادي عشر: نظرية المباريات	٢٧٩
تطبيقات وحالات عملية	٣١٣
مراجع مختارة	٤٠١
قائمة المحتويات	٤٠٣